



Уральский
федеральный
университет

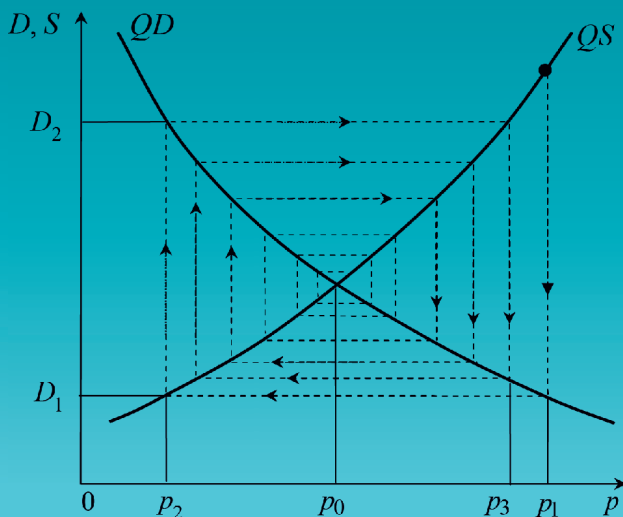
имени первого Президента
России Б.Н.Ельцина

Высшая школа
экономики
и менеджмента

О. Я. ШЕВАЛДИНА

МАТЕМАТИКА В ЭКОНОМИКЕ

Учебное пособие



Министерство образования и науки Российской Федерации

Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

О. Я. Шевалдина

МАТЕМАТИКА В ЭКОНОМИКЕ

*Рекомендовано методическим советом УрФУ
в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся*

по направлениям подготовки

38.03.01 (080100.62) — Экономика,

38.03.02 (080200.62) — Менеджмент,

09.03.03 (230700.62) — Прикладная информатика,

38.03.05 (080500.62) — Бизнес-информатика,

38.05.01 — Экономическая безопасность,

036401.65 — Таможенное дело

Екатеринбург

Издательство Уральского университета

2016

УДК 33.4(075.8)

ББК 65в6я73

ШЗ7

Рецензенты:

главный программист отдела алгебры и топологии ИММ
УрО РАН канд. физ.-мат. наук *С. Э. Нохрин*;

кафедра «Высшая и прикладная математика» УрГУПС (зав.
кафедрой — д-р физ.-мат. наук, проф. *Г. А. Тимофеева*)

Научный редактор — ведущий научный сотрудник ИММ
УрО РАН д-р физ.-мат. наук, проф. *В. Т. Шевалдин*

Шевалдина, О. Я.

ШЗ7 Математика в экономике : учебное пособие / О. Я. Шевалдина. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2016. — 188 с.

ISBN 978-5-7996-1941-1

Пособие содержит теоретические сведения по разделам «Пределы и непрерывность функции одной переменной» и «Дифференциальное и интегральное исчисление» и предназначено для проведения лекционных и практических занятий. Приводятся фундаментальные понятия и доказательства ряда классических теорем этих разделов.

В пособии приведены начальные сведения о методах математического анализа в экономике. Рассматриваются простейшие приложения математики в экономике (предельный анализ, эластичность функций, максимизация прибыли, оптимизация налогообложения предприятий и др.).

Пособие содержит большой набор иллюстративных примеров и задач разного уровня сложности с подробными решениями. Предлагаются задачи для самостоятельной работы студентов (в том числе с экономическим содержанием).

Библиогр.: 11 назв. Рис. 30.

УДК 33.4(075.8)

ББК 65в6я73

ISBN 978-5-7996-1941-1

© Уральский федеральный
университет, 2016

ГЛАВА 1. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1.1. Предел функции в точке по Коши (на языке логических формул). Геометрическая интерпретация. Критерий Гейне

Определение. Окрестностью точки $x_0 \in \mathbf{R}$ называют любой интервал $(c; d)$, содержащий эту точку.

Возьмем число $\delta > 0$. Определим δ — окрестность точки x_0 :

$$O_\delta(x_0) := (x_0 - \delta; x_0 + \delta) = \{x \in \mathbf{R} : |x - x_0| < \delta\}.$$

Заметим, что неравенство $|x - x_0| < \delta$ равносильно двойному неравенству $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$. Поэтому $O_\delta(x_0) = (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$.

Если из окрестности исключить саму точку x_0 , то получим «выколотую» (или «проколотую») окрестность точки x_0 , обозначаемую $\mathring{O}_\delta(x_0)$, то есть

$$\mathring{O}_\delta(x_0) = \{x \in \mathbf{R} : 0 < |x - x_0| < \delta\}.$$

Очевидно, что $\mathring{O}_\delta(x_0) = (x_0 - \delta; x_0) \cup (x_0; x_0 + \delta)$ (рис. 1.1).

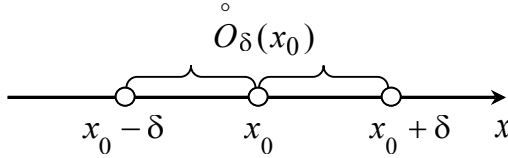


Рис. 1.1. δ — окрестность точки x_0

Окрестности бесконечно удаленных точек $-\infty$, $+\infty$ и ∞ определяются следующим образом:

$$O_{\Delta}(-\infty) := (-\infty, \Delta) = \{x \in \mathbf{R} : x < \Delta\},$$

$$O_{\Delta}(+\infty) := (\Delta, +\infty) = \{x \in \mathbf{R} : x > \Delta\},$$

где Δ — произвольное действительное число,

$$O_{\Delta}(\infty) := \{x \in \mathbf{R} : |x| > \Delta, \Delta > 0\}.$$

Очевидно, что $O_{\Delta}(\infty) := O_{\Delta}(-\infty) \cup O_{\Delta}(+\infty)$.

Определение. Точка x_0 называется *предельной точкой* множества X , $X \in \mathbf{R}$, если в любой ее окрестности найдутся точки из множества X , отличные от x_0 . Множество предельных точек обозначим через X' . То есть

$$(x_0 \in X') := \left(\forall \varepsilon > 0 \quad X \cap \overset{\circ}{O}_{\varepsilon}(x_0) \neq \emptyset \right).$$

Пример 1.1. Пусть $X = [a; b) \cup \{c\}$, $c > b$. Любая точка отрезка $[a; b]$ является предельной точкой множества X , хотя точка $x_0 = b$ и не принадлежит X . Вместе с тем точка $x_0 = c$ принадлежит X , но не является предельной точкой этого множества. Итак, $X' = [a; b]$.

Пример 1.2. Пусть $X = \mathbf{Q}$ — множество рациональных чисел. Тогда $X' = \mathbf{R}$, т.е. любая точка множества \mathbf{R} (действительных чисел) является предельной точкой для множества рациональных чисел.

Предел функции в точке

Пусть $f: X \rightarrow R$, x_0 — предельная точка X .

Определение предела функции по Коши¹. Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0 (при $x \rightarrow x_0$), если для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ найдется положительное число $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$, такое что для всех $x \in X$, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

В этом случае пишут $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ или $f(x) \rightarrow A$ при $x \rightarrow x_0$.

В логической символике сформулированные условия запишутся в виде:

$$\left(A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right) := (\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0 \forall x \in X (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon)).$$

Пусть $0 < \delta \leq \min(|x_1 - x_0|, |x_2 - x_0|)$. На языке окрестностей стремление $f(x) \rightarrow A$ при $x \rightarrow x_0$ означает, что $\forall O_\varepsilon(a) \exists \dot{O}_\delta(x_0), \forall x \in X \cap \dot{O}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in O_\varepsilon(a)$ (рис. 1.2).

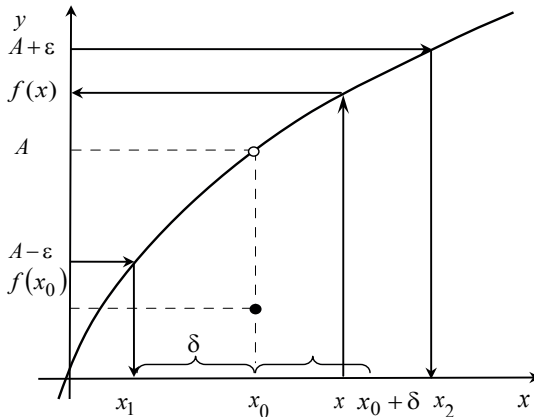


Рис. 1.2. Геометрическая иллюстрация предела функции в точке

¹ Коши Огюстен Луи (1789—1857) — французский математик, один из наиболее активных творцов современного языка и аппарата классического анализа.

Пример 1.3. Пусть $f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 2, \\ 0, & x = 2. \end{cases}$

Имеем $|f(x) - 1| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon \quad \forall x, x \neq 2$, т.е. в любой выколотой окрестности точки $x_0 = 2$. Поэтому $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$ (рис. 1.3).

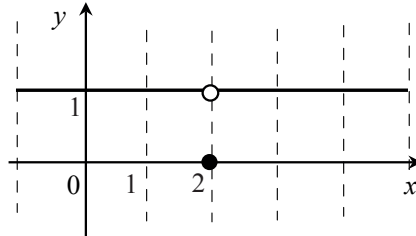


Рис. 1.3. Геометрическая иллюстрация примера 1.3

Пример 1.4. Покажем, что $\lim_{x \rightarrow -2} x^2 = 4$.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Имеем $|x^2 - 4| = |x - 2||x + 2|$. Выделим некоторую, например, 1 — окрестность точки $x_0 = -2$: интервал $(-3; -1)$. Для любого $x \in (-3; -1)$ имеем $-5 < x - 2 < -3$, и следовательно, $|x - 2| < 5$. Поэтому $|x^2 - 4| < 5|x + 2| < \varepsilon$. Отсюда $|x + 2| < \frac{\varepsilon}{5}$.

δ — окрестность точки $x_0 = -2$: $(-2 - \delta, -2 + \delta)$ не должна выходить за пределы 1 — окрестности этой точки, поэтому берем $\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{5}\right)$. Тогда для всех x , удовлетворяющих условию $0 < |x + 2| < \frac{\varepsilon}{5}$, справедливо неравенство $|x^2 - 4| = |x - 2| \cdot |x + 2| < 5\delta \leq 5 \cdot \frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon$. Таким образом, $\lim_{x \rightarrow -2} x^2 = 4$.

Построим отрицание определения предела функции по Коши.

$$\left(\forall A \in \mathbf{R}, A \neq \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right) :=$$

$$= \left(\exists \varepsilon_0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x_\delta := x(\delta) \in X \left(0 < |x - x_0| < \delta \wedge |f(x_\delta) - A| \geq \varepsilon_0 \right) \right).$$

Пример 1.5. Рассмотрим функцию $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$

Покажем, что $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn} x$ не существует. Это означает, что $\forall A \exists \varepsilon_0 \forall \delta > 0 (\exists x_\delta := x(\delta) \in (-\delta, 0) \cup (0, \delta)) \wedge |f(x_\delta) - A| \geq \varepsilon_0$.

Ясно, что A может принадлежать только множеству $\{-1; 0; 1\}$. Пусть $A = 1, \varepsilon_0 = \frac{1}{2}, x_\delta = -1, \delta = 2$. Тогда $(x_\delta = -1 \in (-2; 0) \cup (0; 2)) \wedge |-1 - 1| = 2 > \frac{1}{2} = \varepsilon_0$. Аналогично показывается, что $A = -1, A = 0$ не может быть пределом функции $\operatorname{sgn} x$ при $x \rightarrow 0$.

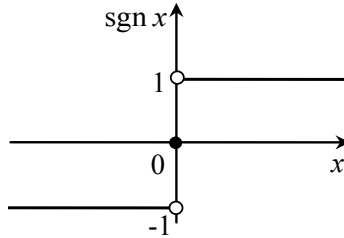


Рис. 1.4. График функции $\operatorname{sgn} x$

Определение предела функции по Гейне¹

Число A называется *пределом функции $f(x)$ в точке x_0* (при $x \rightarrow x_0$), если для произвольной последовательности (x_n) значений $x \in X \setminus \{x_0\}$, сходящейся к точке x_0 , соответствующая последовательность $f(x_n)$ значений функции f сходится к A , т. е.

$$\left(A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right) := \left(\forall (x_n) \subset X \setminus \{x_0\} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A \right) \right).$$

¹ Генрих Эдуард Гейне (1821 – 1881) – немецкий математик. Ученый Дирихле. Занимался преимущественно теорией потенциала, теорией функций и дифференциальными уравнениями.

Отрицание определения предела функции по Гейне:

$$\left(\forall A \in \mathbf{R} \ A \neq \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right) := \left(\exists (x_n) \subset X \setminus \{x_0\} \ \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq A \right) \right).$$

Пример 1.6. Покажем, что функция $f(x) = \cos \frac{1}{x}$ не имеет предела при $x \rightarrow 0$.

Заметим, что $D(f) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Точка $x_0 = 0$ является предельной для $D(f)$.

Рассмотрим последовательность $x_n = \frac{1}{\pi n} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, x_n \neq 0$.

Соответствующая последовательность значений функции $f(x_n) = \cos(\pi n) = (-1)^n$ (последовательность чисел $-1, 1, -1, 1, \dots$) не имеет предела. Следовательно, $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$ не существует.

Пример 1.7. Покажем, что функция $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ не имеет предела при $x \rightarrow 0$.

Заметим, что $D(f) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Точка $x_0 = 0$ является предельной для $D(f)$.

Рассмотрим две последовательности:

$$x'_n = \frac{1}{\pi n} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \text{ для нее } f(x'_n) = \sin \pi n = 0,$$

$$x''_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \text{ для нее } f(x''_n) = \sin \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n \right) = 1.$$

Итак, предела (по Гейне) не существует.

Теорема 1 (Критерий Гейне)

Определение предела функции по Коши и определение предела функции по Гейне эквивалентны.

Доказательство. Необходимость. Пусть существует предел функции по Коши: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$. Возьмем произвольную последовательность $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}, x_n \in X \setminus \{x_0\}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$. Т.к. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, то по заданному $\varepsilon > 0$ найдем $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое что для всех x , удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta$, вы-

полняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, то по найденному $\delta > 0$ можно найти $N = N(\delta) = N(\delta(\varepsilon) \in \mathbb{N})$ такое, что $\forall n > N \quad |x_n - x_0| < \delta$. Но тогда для этих n имеем $|f(x_n) - A| < \varepsilon$, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$. Таким образом, сходимость по Гейне доказана.

Достаточность. Предположим противное: пусть существует предел функции по Гейне $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, но не по Коши. Это означает, что $\exists \varepsilon_0 > 0$, такое что для $\forall \delta > 0$ найдется $x' \in X$, такое что $(0 < |x' - x_0| < \delta) \wedge (|f(x') - A| \geq \varepsilon_0)$. Пусть $\delta = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда для каждого n найдем точку $x_n \in X$ $\left(0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n}\right) \wedge (|f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0)$. Заметим, что неравенство $|x_n - x_0| < \frac{1}{n} \Leftrightarrow x_0 - \frac{1}{n} < x_n < x_0 + \frac{1}{n}$, $x_n \neq x_0$. Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(x_0 - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x_0 + \frac{1}{n}\right) = x_0$, то по теореме 5 о пределе промежуточной последовательности [13, с. 61] получаем $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, $x_n \neq x_0$. Поэтому, по определению Гейне, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$, но по построению $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$, что противоречит тому, что число A является пределом функции f по Гейне.

1.2. Предел функции в бесконечности

Пусть $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, множество X не ограничено (не ограничено сверху, не ограничено снизу), $x_0 = \infty$ ($x_0 = +\infty$, $x_0 = -\infty$). Будем считать x_0 обобщенной предельной точкой множества X . Пусть $A \in \mathbb{R}$.

Определение

$(A = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)) := (\forall \varepsilon > 0 \exists \Delta = \Delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in X (|x| > \Delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon))$ — предел функции по Коши.

$\left(A = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) := \left(\forall (x_n) \in X \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A \right)$ — предел функции по Гейне.

Аналогично

$$\left(A = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) := \left(\forall \varepsilon > 0 \exists \Delta = \Delta(\varepsilon) \in \mathbb{R} \forall x \in X (x > \Delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon) \right),$$

$$\left(A = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) := \left(\forall \varepsilon > 0 \exists \Delta = \Delta(\varepsilon) \in \mathbb{R} \forall x \in X (x < \Delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon) \right).$$

Упражнение. Записать последние два определения предела функции по Гейне.

Замечание. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, вообще говоря, может не совпадать с $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

$$\text{Так, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg x = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctg x = -\frac{\pi}{2}.$$

Геометрическая иллюстрация предела функции в бесконечности

На рис. 1.5 $\Delta \geq \max \{ |x_1|, |x_2| \}$. Для $\forall x : |x| > \Delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.
Иначе: $\forall \varepsilon > 0 \exists \Delta = \Delta(\varepsilon) > 0 \left(\forall x \in X \cap O_{\Delta}(\infty) \Rightarrow f(x) \in O_{\varepsilon}(A) \right)$.

Прямая $y = A$ является горизонтальной асимптотой графика функции.

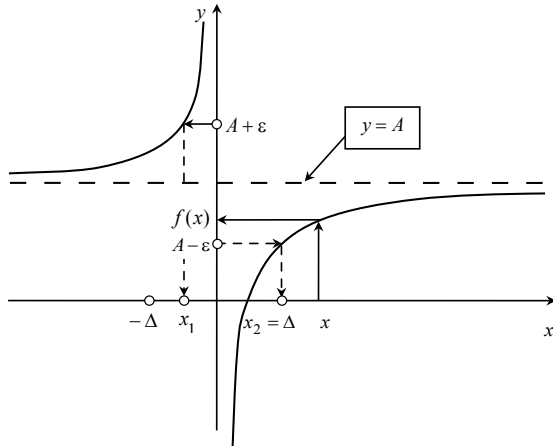


Рис. 1.5. Геометрическая иллюстрация предела функции в бесконечности

1.3. Огносторонние пределы.

Теорема о существовании предела функции в точке

Пусть $f: X \rightarrow \mathbf{R}$, x_0 — предельная точка множества $X^+ := X \cap \{x \in \mathbf{R}: x > x_0\}$ ($X^- := X \cap \{x \in \mathbf{R}: x < x_0\}$).

Пусть $A \in \mathbf{R}$. Положим:

$$\begin{aligned} f(x_0 - 0) &= \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = A := \\ &= (\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0 \forall x \in X (0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x_0 + 0) &= \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = A := \\ &= (\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0 \forall x \in X (0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon)). \end{aligned}$$

Числа $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ называются соответственно *левым* и *правым пределом* (левым и правым предельным значением) функции f в точке x_0 .

Если $f(x_0 - 0) = \pm\infty$, или $f(x_0 + 0) = \pm\infty$, то соответствующий предел называют *бесконечным*.

Теорема 2 (о существовании предела функции в точке)

Функция f имеет предел в точке x_0 тогда и только тогда, когда существуют левый предел и правый предел, причем эти пределы равны:

$$\begin{aligned} \left(\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \right) &\Leftrightarrow \left(\exists \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) \right) \wedge \left(\exists \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0) \right) \wedge \\ &\wedge (f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)). \end{aligned}$$

1.4. Свойства пределов функции в точке

Пусть $f: X \rightarrow R$, x_0 — предельная точка множества X .

Теорема 3 (о единственности предела)

Если существует предел $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, то он единственный.

Доказательство. Предположим противное: пусть существуют два предела: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = B$, $A \neq B$. Возьмем $\varepsilon := \frac{|A - B|}{2}$, $\varepsilon > 0$.

$$\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \right) := \exists \delta_1 > 0 \quad \forall x \in X \left(0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \right),$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = B \right) := \exists \delta_2 > 0 \quad \forall x \in X \left(0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - B| < \varepsilon \right).$$

Пусть

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, $\forall x \in X \left(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \wedge |f(x) - B| < \varepsilon \right)$, т.е. $f(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon) \cap (B - \varepsilon, B + \varepsilon) = \emptyset$ в силу выбора числа $\varepsilon > 0$.

Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема 4 (об ограниченности функции, имеющей предел)

Если существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, то функция $f(x)$ ограничена в некоторой окрестности точки x_0 , то есть:

$$\left(\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \right) \Rightarrow \exists \overset{0}{O}_\delta(x_0) \quad \forall x \in X \cap \overset{0}{O}_\delta(x_0) \quad \text{функция}$$

$f(x)$ ограничена.

Доказательство. Возьмем $\varepsilon = 1$. Тогда

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(1) > 0: \quad \forall x \in X \left(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < 1 \right)$, т.е.

$A - 1 < f(x) < A + 1$, что и означает ограниченность функции $f(x)$ в окрестности $\overset{0}{O}_\delta(x_0)$.

Следствие: пусть $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \neq 0$. Тогда

$\exists \dot{O}_\delta(x_0) \quad \forall x \in X \cap \dot{O}_\delta(x_0)$ функция $\frac{1}{f(x)}$ ограничена.

Теорема 5 (о сохранении знака функции в окрестности точки)

Если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, A \neq 0$, то

$$\exists \dot{O}_\delta(x_0) \quad \forall x \in \dot{O}_\delta(x_0) \cap X \Rightarrow |f(x)| > \frac{1}{2}|A|.$$

Доказательство. Полагаем $\varepsilon := \frac{|A|}{2}$ и находим $\delta > 0$, такое что для всех $x \in X$, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется оценка

$$|f(x) - A| < \frac{1}{2}|A|.$$

Эта оценка равносильна двойному неравенству:

$$-\frac{1}{2}|A| < f(x) - A < \frac{1}{2}|A|. \quad (1.1)$$

Если $A > 0$, то пользуемся левым неравенством (1.1), если $A < 0$ — правым.

Следствие. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, A \neq 0$, то $\exists \dot{O}_\delta(x_0): \forall x \in \dot{O}_\delta \cap X \Rightarrow \operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} A$.

Теорема 6 (о неравенстве пределов)

Пусть $f: X \rightarrow \mathbb{R}, g: X \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in X'$ и для функций $f(x)$ и $g(x)$ существуют пределы $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, а также пусть $\exists \dot{O}_\delta(x_0): \forall x \in \dot{O}_\delta(x_0) \cap X$ справедливо неравенство

$$f(x) \geq g(x).$$

Тогда

$$A \geq B.$$

Теорема 7 (о пределе промежуточной функции)

Пусть $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $g: X \rightarrow \mathbb{R}$, $h: X \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in X'$ и

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A.$$

Пусть также $\exists \overset{\circ}{O}_{\delta_0}(x_0): \forall x \in \overset{\circ}{O}_{\delta_0}(x_0) \cap X$ имеет место неравенство $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Тогда

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A.$$

Доказательство

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A := \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 \quad \forall x \in X (0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A := \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0 \quad \forall x \in X (0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |h(x) - A| < \varepsilon).$$

Положим $\delta = \delta(\varepsilon) = \min\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\} \quad \forall x \in X \cap \overset{\circ}{O}_{\delta}(x_0)$. Тогда $A - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < A + \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < g(x) - A < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A$.

Теорема 8. Пусть существует $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, тогда существует $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)|$ и справедливо равенство

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right|.$$

Доказательство

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A := \forall \varepsilon > 0 \exists \delta \quad \forall x \in X (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon).$$

Но тогда $\|f(x) - A\| \leq |f(x) - A| < \varepsilon$, и теорема доказана.

Замечание. Обратное утверждение неверно.

Пример 1.8. Если $f(x) = \operatorname{sgn} x$, то $\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow 0} |\operatorname{sgn} x| = 1$, но $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn} x$ не существует.

Определение. $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in X'$. Функция $f(x)$ называется *ограниченной в X* , если множество ее значений $E(f)$ яв-

ляется ограниченным множеством, то есть если $\exists k, K \in \mathbb{R} : \forall x \in X \quad k \leq f(x) \leq K$.

1.5. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Определение. Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой функцией* при $x \rightarrow x_0$, если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0,$$

$$\text{т. е. } \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in X \left(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon \right).$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 9 (о связи бесконечно малых функций с функциями, имеющими конечный предел)

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 , за исключением, быть может, самой точки x_0 . Для того чтобы функция $f(x)$ имела при $x \rightarrow x_0$ конечный предел A , *необходимо и достаточно*, чтобы функция $\alpha(x) := f(x) - A$ была бесконечно малой при $x \rightarrow x_0$.

В символической записи:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad (A \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \exists \overset{\circ}{O}_\delta(x_0) \quad \forall x \in X \cap \overset{\circ}{O}_\delta(x_0) \quad f(x) = A + \alpha(x),$$

где $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$.

Пусть $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 — предельная точка X .

Определение. Функция $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ называется *бесконечно большой*, если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$.

На языке « ε – δ » это означает: $\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \right) := (\forall E > 0 \quad \exists \delta = \delta(E) > 0 \quad \forall x \in X \left(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > E \right))$.

Геометрическая иллюстрация бесконечно большой функции $f(x)$

На рис. 1.6 $0 < \delta \leq \min(|x_1 - x_0|, |x_2 - x_0|)$. Для $\forall x \in X (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > E)$.

Прямая $x = x_0$ является *вертикальной асимптотой* графика функции.

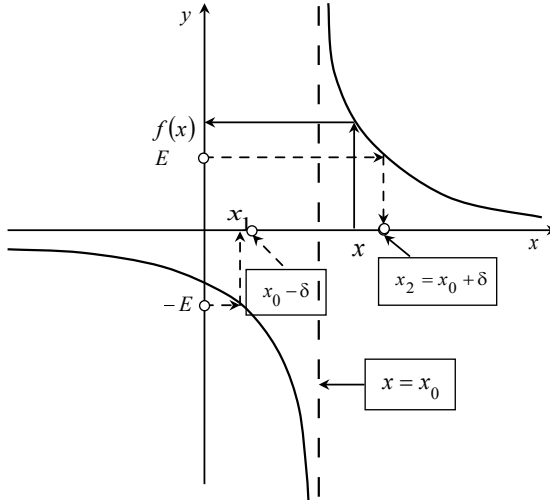


Рис. 1.6. Геометрическая иллюстрация бесконечно большой функции $f(x)$

Определение. Функция $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ называется *положительной бесконечно большой функцией*, если

$$\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \right) := \left(\forall E \in \mathbf{R} \exists \delta = \delta(E) > 0 \forall x \in X (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > E) \right).$$

Определение. Функция $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ называется *отрицательной бесконечно большой функцией*, если

$$\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \right) := \left(\forall E \in \mathbf{R} \exists \delta = \delta(E) > 0 \forall x \in X (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < E) \right).$$

Переменная x может стремиться к бесконечности: $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$. Функция $f(x)$ может неограниченно

возрастать ($y \rightarrow +\infty$), убывать ($y \rightarrow -\infty$), неограниченно возрастать по модулю ($|y| \rightarrow +\infty$). Это приводит к существованию еще девяти определений бесконечно больших.

$$\lim_{x \rightarrow \begin{cases} \infty \\ +\infty \\ -\infty \end{cases}} f(x) = \begin{cases} \infty \\ +\infty \\ -\infty \end{cases}$$

Например,

$$\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty \right) := \left(\forall E \in \mathbf{R} \exists \Delta = \Delta(E) \forall x \in X (x > \Delta \Rightarrow |f(x)| > E) \right);$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \right) := \left(\forall E \in \mathbf{R} \exists \Delta = \Delta(E) \forall x \in X (x < \Delta \Rightarrow f(x) < E) \right).$$

Пример 1.9. Функция $\alpha(x) = x^2$ является бесконечно малой при $x \rightarrow 0$, а функция $f(x) = \frac{1}{x^2}$ является бесконечно малой при $x \rightarrow \infty$.

1.6. Свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций

1. Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые функции (б.м. ф.) при $x \rightarrow x_0$, то их сумма $\alpha(x) + \beta(x)$ и произведение $\alpha(x)\beta(x)$ — б.м. ф. при $x \rightarrow x_0$;

2. Пусть $\alpha(x) \neq 0$ в $\mathring{O}_\delta(x_0)$. Тогда ($\alpha(x)$ — б.м. ф. при $x \rightarrow x_0$)
 $\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\alpha(x)} \right)$ — бесконечно большая функция (б.б. ф.) при $x \rightarrow x_0$.

Теорема 10 (о произведении б.м. ф. на ограниченную функцию)

Произведение бесконечно малой функции $\alpha(x)$ при $x \rightarrow x_0$ на функцию $\beta(x)$, ограниченную в $\mathring{O}_\delta(x_0)$, есть функция бесконечно малая при $x \rightarrow x_0$.

Доказательство. Так как $\beta(x)$ ограничена в $\overset{\circ}{O}_{\delta}(x_0)$, то $\exists M \in \mathbb{R}, \exists \overset{\circ}{O}(x_0) \forall x \in \overset{\circ}{O}_{\delta_1}(x_0) |\beta(x)| \leq M$. Далее $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$, откуда вытекает, что $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0 \forall x \in \overset{\circ}{O}_{\delta_2}(x_0) \cap X \Rightarrow |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$.

Пусть $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда $\forall x: 0 < |x - x_0| < \delta$ получим:

$$|\alpha(x)\beta(x)| = |\alpha(x)| |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon.$$

Итак, $\lim_{x \rightarrow x_0} [\alpha(x)\beta(x)] = 0$, т.е. $\alpha(x)\beta(x)$ — бесконечно малая функция.

Отношение бесконечно малых функций $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ при $x \rightarrow x_0$ (или бесконечно больших) требует специального рассмотрения.

1.7. Арифметические свойства пределов функции.

Теорема о пределе композиции

Пусть $f: X \rightarrow \mathbb{R}, g: X \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in X$.

Теорема 11. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ при $x \rightarrow x_0$ имеют конечные пределы, т.е. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B, A$ и B — числа. Тогда при $x \rightarrow x_0$ имеет конечный предел каждая из функций:

$$1) f(x) + g(x), 2) f(x) \cdot g(x), 3) \frac{f(x)}{g(x)} \text{ (при } B \neq 0),$$

и при этом

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B,$$

- 2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = AB$,
 3) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)/g(x) = A/B \quad (B \neq 0)$.

Докажем 3. Представим $\frac{f(x)}{g(x)}$ в виде:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B} + \frac{A}{B} = \frac{A}{B} + \frac{f(x)B - g(x)A}{B(g(x))} = \\ &= \frac{A}{B} + \frac{(f(x) - A)B - (g(x) - B)A}{B(g(x))}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

$(f(x) - A)B - (g(x) - B)A$ — б.м. ф., $(g(x) - B)A$ — б.м. ф., функция $\frac{1}{g(x)}$ — ограничена в окрестности точки x_0 , поэтому второе

слагаемое в (1.2) — б.м. ф.

Итак, $\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B}$ — б.м. ф. Тогда по *теореме 1* п. 1.5 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$.

Замечание. Свойства, касающиеся пределов суммы, произведения, обобщаются на случай любого конечного числа функций, имеющих предел.

Если предельные значения оказываются равными 0 или ∞ , то возникают *неопределенности* различных видов:

$$\boxed{\frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad 1^\infty, \quad 0^0, \quad \infty^0}$$

Соотношения $\frac{\infty}{0}, \frac{0}{\infty}, +\infty + \infty, -\infty - \infty, 0^{\pm\infty}, (+\infty)^{\pm\infty}$ не являются неопределенностями. Действительно, $\left[\frac{\infty}{0}\right] \rightarrow \infty, \left[\frac{0}{\infty}\right] \rightarrow 0, [+ \infty + \infty] \rightarrow +\infty, [- \infty - \infty] \rightarrow -\infty, [0^{+\infty}] \rightarrow 0, [(+\infty)^{-\infty}] \rightarrow 0$.

Теорема 12 (о пределе композиции)

Пусть $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$, $x_0 \in X'$, $y_0 \in Y'$ и пусть $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$, причем $\forall x \in X \setminus \{x_0\} \quad f(x) \neq y_0$. Пусть далее $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = A$, тогда существует

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = A.$$

Доказательство. Воспользуемся определением предела функции по Гейне: $\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0 \right) := \left(\forall (x_n) \subset X \setminus \{x_0\} : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y_0 \right)$.

Пусть $y_n := f(x_n)$, $y_n \neq y_0$. Так как $\left(\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = A \right) := \left(\forall (y_n) \subset Y \setminus \{y_0\} : \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0 \right)$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} g(y_n) = A$.

Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} g(f(x_n)) = A \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = A$.

1.8. Замечательные пределы

Первым замечательным пределом называется равенство

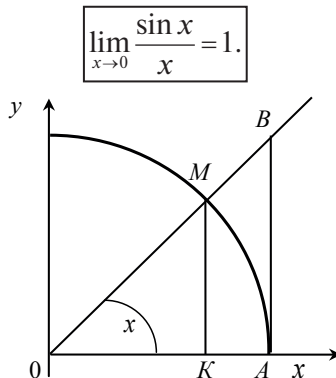


Рис. 1.7. Первый замечательный предел

Для доказательства рассмотрим круг радиуса R с центром в точке $O(0;0)$. Пусть OM — подвижный радиус, образующий угол $x \left(0 < x < \frac{\pi}{2} \right)$ с осью Ox . Функция $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ — четная

($f(-x) = f(x)$), область определения $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, поэтому доказательство проведем на $\left(0; \frac{\pi}{2} \right)$. Из геометрических соо-

бражений $MK < OM < MA < BA$, то есть $0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x$ или $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ при $x \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right)$. Так как $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1$

(функция $f(x) = \cos x$ непрерывна при значении $x=0$), то обе функции $f(x) = \cos x$ и $h(x) = 1$ имеют при $x \rightarrow 0$ предел, равный единице. Используя теорему 7 о пределе промежуточной функции, получим $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Следствия из первого замечательного предела:

$$1. \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1}.$$

$$\text{Действительно, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{1} = 1.$$

$$2. \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1}.$$

$$\text{Заменим } \arcsin x = y. \text{ Тогда } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} = 1.$$

$$3. \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1}.$$

Воспользуемся определением $\operatorname{tg} x$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1.$$

4. Аналогично, $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1}.$

Замечание. Если $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x \rightarrow x_0$, то первый замечательный предел записывается в виде:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin \alpha(x)}{\alpha(x)} = 1}.$$

1.9. Теоремы о пределе монотонной функции

Пусть $f: X \rightarrow \mathbb{R}, X \subset \mathbb{R}$.

Определение. Функция f монотонно возрастает (убывает) на множестве X , если $\forall x_1, x_2, x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$).

Теорема 13. Пусть $f: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in (a; b)$ и функция f монотонна на $(a; b)$. Тогда существуют $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$, причем:

если $f(x)$ монотонно возрастает, то

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \sup \{ f(x) : x < x_0 \},$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \inf \{ f(x) : x > x_0 \},$$

если $f(x)$ монотонно убывает, то

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \inf \{ f(x) : x < x_0 \},$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \sup \{ f(x) : x > x_0 \}.$$

Доказательство. Пусть $f(x)$ монотонно возрастает, множество значений ее значений $\{f(x): x < x_0\}$ ограничено сверху (например, числом $f(x_0)$). Пусть

$$A := \sup\{f(x): x < x_0\}. \quad (1.3)$$

Покажем, что $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = A$. Из (1.3) следует, что $\forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon < x_0 : f(x_\varepsilon) > A - \varepsilon$. Положим $\delta_\varepsilon := x_0 - x_\varepsilon, \delta_\varepsilon > 0$. Возьмем $\forall x \in (a, b) : 0 < x_0 - x < \delta_\varepsilon = x_0 - x_\varepsilon$. Тогда $x > x_\varepsilon \Rightarrow f(x) \geq f(x_\varepsilon) > A - \varepsilon$, т.е. $\forall x : 0 < x_0 - x < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$, $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \sup\{f(x): x < x_0\}$.

Доказательство в случае монотонно убывающей функции аналогично.

Теорема 14 (второй замечательный предел)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \quad (1.4)$$

Доказательство. Ранее (п. 7.2 в источнике [13]) мы доказали, что последовательность $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ сходится к числу e :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Выберем некоторую строго возрастающую последовательность натуральных чисел $1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$. Согласно теореме 3 (п. 7.4 в источнике [13]) любая подпоследовательность последовательности $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ также сходится, причем к числу e , т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} = e.$$

Докажем (1.4). Рассмотрим вначале случай $x > 0$. Тогда $\exists n \in \mathbb{Z} : n \leq x < n+1$, и $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}$, откуда

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

$$\text{Найдем } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{n+1}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)} = \frac{e}{1} = e.$$

$$\text{Аналогично } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e.$$

По теореме 7 о пределе промежуточной функции (п. 1.4)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad x > 0.$$

Во втором случае $x < 0$ сделаем замену: $t = -x$, $t \rightarrow +\infty$. Имеем

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \left(1 - \frac{1}{t}\right)^{-t} = \left(\frac{t}{t-1}\right)^t = \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^{t-1} \left(1 + \frac{1}{t-1}\right).$$

Переходя к пределу, получим

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^{t-1} \cdot \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t-1}\right) = e \cdot 1 = e. \text{ Итак,}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Следствия из второго замечательного предела

До сих пор мы пользовались только арифметическими свойствами пределов функций и теоремой о пределе композиции (п. 1.7). Для дальнейшего нам понадобятся еще два **свойства**:

А. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$, а функция $g(y)$ непрерывна в точке y_0 , то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(y_0) = g\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)\right). \quad (1.5)$$

$$\text{Б. } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)\right)^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}, f(x) > 0. \quad (1.6)$$

Второй замечательный предел можно записать в виде:

$$\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e. \quad (1.7)$$

Докажем следующие равенства, являющиеся следствиями второго замечательного предела.

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Действительно, воспользовавшись свойствами логарифмов и свойством А, получаем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(1+x) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1.$$

$$\text{Аналогично } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a} \quad (a > 0, a \neq 1).$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Положим $e^x - 1 = y$, $x = \ln(1+y)$. Ясно, что $y \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$.

$$\text{Следовательно, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1+y)}{y}} = \frac{1}{1} = 1.$$

$$\text{Аналогично } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad (a > 0, a \neq 1).$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^p - 1}{x} = p, \quad p \in \mathbb{R}.$$

Положим $(1+x)^p - 1 = y$.

Отсюда $(1+x)^p = 1+y \Rightarrow p \cdot \ln(1+x) = \ln(1+y)$.

Тогда

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^p - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1+y)} \cdot \frac{\ln(1+y)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1+y)} \cdot \frac{p \cdot \ln(1+x)}{x} = p.$$

Замечание. Если $\alpha(x)$ — б.м. ф. при $x \rightarrow x_0$, то второй замечательный предел записывается в виде

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(1 + \alpha(x)\right)^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0. \quad (1.7)$$

1.10. Сравнение функций. Теоремы об эквивалентных функциях

Пусть $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $g: X \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in X'$.

Определение. Если существует такое положительное число C и такая окрестность $\overset{\circ}{O}_\delta(x_0)$ точки x_0 , что для всех $x \in X \cap \overset{\circ}{O}_\delta(x_0)$ выполняется неравенство

$$|f(x)| \leq C |g(x)|,$$

то пишут $f(x) = O(g(x))$ ($f = O(g)$) при $x \rightarrow x_0$, и говорят, что f есть O — большое от g при $x \rightarrow x_0$.

Определение. Функции f и g называются функциями одного порядка в окрестности точки x_0 , если $(g = O(f)) \wedge (f = O(g))$, $x \rightarrow x_0$.

Теорема 15. Если $\forall x \in X \cap \overset{\circ}{O}_\delta(x_0) \quad g(x) \neq 0$
и $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = C \in \mathbb{R} \quad (C \neq 0)$,

то f и g — функции одного порядка при $x \rightarrow x_0$.

Определение. Если $g(x) \equiv 1$, то запись

$$f(x) = O(1), \quad x \rightarrow x_0$$

означает, что функция $f(x)$ *ограничена в окрестности точки x_0* (или просто в точке x_0).

Определение. Функция, ограниченная в каждой точке множества X , называется *ограниченной на множестве X* .

Определение. Функция $g: X \rightarrow \mathbf{R}$ называется *ограниченной сверху (снизу)* на множестве X , если множество ее значений $\{g(x): x \in X\}$ ограничено сверху (снизу).

Определение. Если для любого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность $\mathring{O}_\delta(x_0) \subset X: \forall x \in \mathring{O}_\delta(x_0)$, выполняется неравенство

$$|f(x)| < \varepsilon |g(x)|,$$

то пишут:

$$f(x) = o(g(x)), \quad x \rightarrow x_0, \quad (f = o(g), \quad x \rightarrow x_0),$$

и говорят, что $f(x)$ есть o — малое от $g(x)$ при $x \rightarrow x_0$.

Если $f = o(1)$, $x \rightarrow x_0$, то $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, т.е. $f(x)$ — *бесконечно малая функция*.

Определение. Если $f = o(1)$, $g = o(1)$ и $f = o(g)$ при $x \rightarrow x_0$, то функцию f называют *бесконечно малой более высокого порядка малости*, чем g при $x \rightarrow x_0$.

<p>Теорема 16. $f = o(g), \quad x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \exists h = o(1), \quad x \rightarrow x_0: g(x) = f(x) h(x).$</p>
--

Определение. Функции $f(x)$ и $g(x)$ называются *эквивалентными* при $x \rightarrow x_0$, если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

При этом используется символическая запись

$$\boxed{f(x) \sim g(x), x \rightarrow x_0}.$$

Пример 1.10. $\sin x \sim x, x \rightarrow 0$, так как $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Теорема 17. $f(x) \sim g(x), x \rightarrow x_0$, тогда и только тогда, когда $f - g = o(g), x \rightarrow x_0$.

Пусть $f: X \rightarrow \mathbf{R}, g: X \rightarrow \mathbf{R}, x_0 \in X'$.

Приведем еще две простые теоремы, полезные при вычислении пределов.

Теорема 18. Если $f \sim f_1, x \rightarrow x_0; g \sim g_1, x \rightarrow x_0$, то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)},$$

если существует хотя бы один из этих пределов.

Доказательство. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \cdot \frac{g_1(x)}{f_1(x)} \right) =$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{f_1(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g_1(x)}{g(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = 1 \cdot 1 \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}.$$

Теорема 19. Если $f \sim f_1, x \rightarrow x_0$, то $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x)g(x)$,

если существует хотя бы один из этих пределов.

Определение. Если существует окрестность $O_\varepsilon(x_0)$ точки x_0 , такая что $\forall x \in O_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}$

$$f = ag + o(g), \quad a \neq 0,$$

то

$$f \sim ag, \quad x \rightarrow x_0,$$

при этом функция $ag(x)$, $x \in O_\varepsilon(x_0)$ называется *главной частью функции* f , при $x \rightarrow x_0$.

Замечание. Функции при нахождении пределов часто заменяют их главными частями.

1.11. Вычисление пределов функций

Раскрытие неопределенностей вида $\left[\frac{0}{0} \right]$

Пример 1.11. Вычислить предел функции $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{2x^2 - 9x + 9}$.

Прежде всего отметим, что пользоваться теоремой п. 1.7 о пределе частного двух функций нельзя, так как предел знаменателя равен нулю.

Непосредственная подстановка предельного значения аргумента приводит к неопределенности вида $\left[\frac{0}{0} \right]$. Поэтому,

прежде чем перейти к пределу, необходимо данное выражение преобразовать. Числитель и знаменатель данной дроби при $x = 3$ обращаются в нуль, поэтому многочлены $x^2 + x - 12$ и $2x^2 - 9x + 9$ делятся без остатка на $x - 3$ (теорема Безу). Заметим, что операция деления числителя и знаменателя на $x - 3$ законна, так как значение $x = 3$ не рассматривается ($x \rightarrow 3$), и значит, $x - 3 \neq 0$. Итак,

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{2x^2 - 9x + 9} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+4)}{2(x-3)\left(x - \frac{3}{2}\right)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+4)}{2\left(x - \frac{3}{2}\right)}.$$

Теперь, подставляя предельное значение $x=3$ в полученное выражение, получим

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{2x^2 - 9x + 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+4)}{2\left(x - \frac{3}{2}\right)} = \frac{3+4}{2\left(3 - \frac{3}{2}\right)} = \frac{7}{3}.$$

Пример 1.12. Вычислить предел функции $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 5x^2 - 4}{x^4 - 2x^2 + 1}$.

Как и в предыдущем примере, имеем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0} \right]$. Разделим «столбиком» числитель и знаменатель

дроби на $x - (-1) = x + 1$. Имеем

$$\begin{array}{r} \frac{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}{x^3 + x^2} \Bigg| \frac{x+1}{x^2 + 3x + 2} \\ \hline \quad 3x^2 + 5x \\ \quad \underline{3x^2 + 3x} \\ \quad \quad 2x + 2 \\ \quad \quad \underline{2x + 2} \\ \quad \quad \quad 0 \end{array}$$

Квадратный трехчлен $x^2 + 3x + 2$ обращается в нуль при $x = -1$, поэтому еще раз делим на $x + 1$: $x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$. Итак, числитель $x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = (x+1)^2(x+2)$.

Аналогично можно поступить и со знаменателем. Операцию деления «столбиком» придется повторить дважды, однако можно поступить проще:

$$x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2 = ((x-1)(x+1))^2 = (x-1)^2 (x+1)^2.$$

Итак,

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 5x^2 - 4}{x^4 - 2x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)^2 (x+2)}{(x+1)^2 (x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+2}{(x-1)^2} = \frac{-1+2}{(-1-1)^2} = \frac{1}{4}.$$

Пример 1.13. Вычислить предел функции $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - x}{x^3 - 27}$.

Здесь также имеем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0} \right]$. Нужно из-

бавиться надлежащим образом от квадратичной иррациональности. Для этого числитель и знаменатель умножим на выражение, сопряженное числителю (используется формула $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$):

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - x}{x^3 - 27} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+6} - x)(\sqrt{x+6} + x)}{(x^3 - 27)(\sqrt{x+6} + x)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+6 - x^2}{(x^3 - 27)(\sqrt{x+6} + x)}.$$

Опять имеем неопределенность $\left[\frac{0}{0} \right]$. Как и ранее (см. преды-

дущие примеры), разделим числитель и знаменатель на $x - 3$:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+6 - x^2}{(x^3 - 27)(\sqrt{x+6} + x)} = \left[\frac{0}{0} \right] = \left[\frac{x+6 - x^2 = -(x-3)(x+2)}{x^3 - 27 = (x-3)(x^2 + 3x + 9)} \right] =$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-(x-3)(x+2)}{(x-3)(x^2+3x+9)(\sqrt{x+6}+x)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-(x+2)}{(x^2+3x+9)(\sqrt{x+6}+x)} = \\
 &= \frac{-(3+2)}{(3^2+3 \cdot 3+9)(\sqrt{3+6}+3)} = -\frac{5}{27 \cdot 6} = -\frac{5}{162}.
 \end{aligned}$$

Пример 1.14. Вычислить предел функции $\lim_{x \rightarrow 27} \frac{x-27}{\sqrt[3]{x}-3}$.

Снова неопределенность $\left[\frac{0}{0} \right]$. Умножим и разделим числитель и знаменатель на неполный квадрат суммы (используется формула $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$), т.е. на $(\sqrt[3]{x})^2 + 3 \cdot \sqrt[3]{x} + 3^2$:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 27} \frac{x-27}{\sqrt[3]{x}-3} &= \lim_{x \rightarrow 27} \frac{(x-27)\left((\sqrt[3]{x})^2 + 3 \cdot \sqrt[3]{x} + 3\right)}{(\sqrt[3]{x}-3)\left((\sqrt[3]{x})^2 + 3 \cdot \sqrt[3]{x} + 3\right)} = \lim_{x \rightarrow 27} \frac{(x-27)\left((\sqrt[3]{x})^2 + 3 \cdot \sqrt[3]{x} + 3\right)}{(\sqrt[3]{x})^3 - 3^3} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 27} \frac{(x-27)\left((\sqrt[3]{x})^2 + 3 \cdot \sqrt[3]{x} + 3^2\right)}{x-27} = \left[(\sqrt[3]{x})^2 + 3 \cdot \sqrt[3]{x} + 3^2 \rightarrow 27, x \rightarrow 27 \right] = 27.
 \end{aligned}$$

Пример 1.15. Вычислить предел функции $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$.

Имеем неопределенность $\left[\frac{0}{0} \right]$. Здесь избавляемся от квадратичной и кубической иррациональности одновременно:

$$\lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}} = \lim_{x \rightarrow -8} \frac{(\sqrt{1-x}-3)(\sqrt{1-x}+3)\left(2^2-2 \cdot \sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2\right)}{(2+\sqrt[3]{x})(\sqrt{1-x}+3)\left(2^2-2 \cdot \sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2\right)} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow -8} \frac{(1-x-9) \left(2^2 - 2 \cdot \sqrt[3]{x} + (\sqrt[3]{x})^2 \right)}{(8+x)(\sqrt{1-x}+3)} = - \lim_{x \rightarrow -8} \frac{\left(2^2 - 2 \cdot \sqrt[3]{x} + (\sqrt[3]{x})^2 \right)}{(\sqrt{1-x}+3)} = \\
 &= \left[\begin{array}{l} 2^2 - 2 \cdot \sqrt[3]{x} + (\sqrt[3]{x})^2 \rightarrow 12, \ x \rightarrow -8 \\ \sqrt{1-x} + 3 \rightarrow 6, \ x \rightarrow -8 \end{array} \right] = -\frac{12}{6} = -2.
 \end{aligned}$$

Раскрытие неопределенностей вида $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$

Пример 1.16. Вычислить $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x + \sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt{x^2+2}+2x}$.

При $x \rightarrow +\infty$ числитель и знаменатель дроби неограниченно возрастают, поэтому имеет место неопределенность $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.

Для раскрытия этой неопределенности, как и в случае последовательностей, числитель и знаменатель дроби делят на подходящую степень x :

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x + \sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt{x^2+2}+2x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{5x + \sqrt[3]{x^3+1}}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+2}+2x}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 + \sqrt[3]{\frac{x^3+1}{x^3}}}{\sqrt{\frac{x^2+2}{x^2}} + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^3}}}{\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} + 2} = \\
 &= \frac{5+1}{1+2} = 2.
 \end{aligned}$$

Пример 1.17. Вычислить $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x + \sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt{x^2+2}+2x}$.

Здесь числитель $5x + \sqrt[3]{x^3 + 1} \rightarrow -\infty$. В знаменателе имеем неопределенность $[\infty - \infty]$: причем $\sqrt{x^2 + 2} \rightarrow +\infty$, $2x \rightarrow -\infty$. Опять разделим числитель и знаменатель на x , не забывая, что $x < 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x + \sqrt[3]{x^3 + 1}}{\sqrt{x^2 + 2} + 2x} &= \left[\begin{array}{l} x = -|x|, \quad x = -\sqrt{x^2}, \\ \text{т. к. } \sqrt{x^2} = |x| \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{5x + \sqrt[3]{x^3 + 1}}{x}}{\frac{\sqrt{x^2 + 2} + 2x}{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 + \sqrt[3]{\frac{x^3 + 1}{x^3}}}{-\sqrt{\frac{x^2 + 2}{x^2}} + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^3}}}{-\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} + 2} = \frac{5 + 1}{-1 + 2} = 6. \end{aligned}$$

Раскрытие неопределенностей вида $[\infty - \infty]$

Пример 1.18. Вычислить $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 9x - 2} - \sqrt{x^2 - x + 3})$.

Здесь при $x \rightarrow +\infty$ получаем неопределенность $[\infty - \infty]$, которую можно привести к неопределенности $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ умножением и делением на выражение, сопряженное к данному. Таким образом, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 9x - 2} - \sqrt{x^2 - x + 3}) =$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 9x - 2} - \sqrt{x^2 - x + 3})(\sqrt{x^2 + 9x - 2} + \sqrt{x^2 - x + 3})}{\sqrt{x^2 + 9x - 2} + \sqrt{x^2 - x + 3}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 9x - 2})^2 - (\sqrt{x^2 - x + 3})^2}{\sqrt{x^2 + 9x - 2} + \sqrt{x^2 - x + 3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 9x - 2 - x^2 + x - 3}{\sqrt{x^2 + 9x - 2} + \sqrt{x^2 - x + 3}} = \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10x-5}{\sqrt{x^2+9x-2}+\sqrt{x^2-x+3}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10-\frac{5}{x}}{\sqrt{1+\frac{9}{x}-\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}} = 5.$$

Раскрытие неопределенностей вида $\left[1^\infty\right]$

Пример 1.19. Вычислить предел функции $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+5x}{x^2-5x} \right)^{2x}$.

Преобразуем выражение под знаком предела так, чтобы можно было воспользоваться вторым замечательным пределом (формула (1.7)):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+5x}{x^2-5x} \right)^{2x} &= \left[1^\infty\right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \underbrace{\frac{x^2+5x}{x^2-5x} - 1}_{\frac{10x}{x^2-5x}} \right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x^2+5x-x^2-5x}{x^2-5x} \right)^{2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{10x}{x^2-5x} \right)^{\frac{x^2-5x}{10x}} \right)^{\frac{10x}{x^2-5x} \cdot 2x}. \end{aligned}$$

Пользуясь свойством (1.6), получим

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{10x}{x^2-5x} \right)^{\frac{x^2-5x}{10x}} \right)^{\frac{10x}{x^2-5x} \cdot 2x} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{20x^2}{x^2-5x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{20}{1-\frac{5}{x}}} = e^{20}. \end{aligned}$$

Здесь $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{10x}{x^2-5x} \right)^{\frac{x^2-5x}{10x}} = e$, так как $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x}{x^2-5x} = 0$.

Вычисление пределов с помощью эквивалентных бесконечно малых

Ранее были получены следствия из первого замечательно-го предела: $x \sim \sin x \sim \arcsin x \sim \operatorname{tg} x \sim \operatorname{arctg} x$, $x \rightarrow 0$,

причем вместо x можно взять любую бесконечно малую функцию. То есть если $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$, то

$$\alpha(x) \sim \sin \alpha(x) \sim \arcsin \alpha(x) \sim \operatorname{tg} \alpha(x) \sim \operatorname{arctg} \alpha(x), \quad x \rightarrow x_0.$$

Аналогично для второго замечательного предела

$$x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1 \sim \frac{a^x - 1}{\ln a} \sim \frac{(1+x)^p - 1}{p}, \quad x \rightarrow 0.$$

Точно так же эти соотношения верны при $x \rightarrow x_0$, если x заменить любой бесконечно малой функцией: $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$.

Пример 1.20. Вычислить предел функции $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 4x}{\sin x^2}$.
Воспользуемся формулами:

$$\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x), \quad \alpha(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow x_0;$$

$$\sin \alpha(x) \sim \alpha(x), \quad \alpha(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow x_0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 4x}{\sin x^2} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \cos 4x - 1)}{\sin x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - 1}{\sin x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 2x}{\sin x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 2x}{\sin x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2(2x)^2}{x^2} = -8. \end{aligned}$$

Пример 1.21. Вычислить предел функции $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e}$.

$$\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e} = \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - \ln e}{x - e} = \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln \frac{x}{e}}{x - e} = \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln \left(1 + \frac{x}{e} - 1 \right)}{x - e}.$$

При $x \rightarrow e$ функция $\frac{x}{e} - 1 \rightarrow 0$.

$$\text{Тогда } \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{e} - 1\right)}{x - e} = \lim_{x \rightarrow e} \frac{\frac{x}{e} - 1}{x - e} = \frac{1}{e} \lim_{x \rightarrow e} \frac{x - e}{x - e} = \frac{1}{e}.$$

Пример 1.22. Вычислить предел функции $\lim_{x \rightarrow e} \frac{e^{5x} - e^x}{\sin 5x - \sin x}$.

Числитель и знаменатель дроби сначала преобразуем, а затем заменим эквивалентными функциями:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - e^x}{\sin 5x - \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x (e^{5x-x} - 1)}{\sin \frac{5x-x}{2} \cdot \cos \frac{5x+x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x (e^{4x} - 1)}{\sin \frac{5x-x}{2} \cdot \cos \frac{5x+x}{2}} = \\ &= \left[\frac{e^{4x} - 1 \sim 4x, x \rightarrow 0}{\sin 2x \sim 2x, x \rightarrow 0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \cdot 4x}{\sin 2x \cdot \cos 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \cdot 4x}{2x \cdot \cos 3x} = 2. \end{aligned}$$

Пример 1.23. Вычислить предел функции $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$.

Имеем $x \sim \sin x \sim \operatorname{tg} x, x \rightarrow 0$. Но если заменить $\operatorname{tg} x$ на $\sin x$ (это не обосновано), то получим в числителе неверный результат. Поэтому предварительно преобразуем выражение под знаком предела:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \left(\frac{1}{\cos x} - 1 \right)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2 \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} \cdot 1 = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{x}{2} \right)^2}{x^2} = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Пример 1.24. Вычислить предел функции $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \operatorname{tg} \left(\frac{\pi x}{2} \right)$.

Если обозначить $x-1=\alpha$, то $x=\alpha+1, \alpha \rightarrow 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \left(\frac{\pi x}{2} \right) &= -\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha \operatorname{tg} \left(\frac{\pi(\alpha+1)}{2} \right) = -\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha \operatorname{tg} \left(\frac{\pi\alpha}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi\alpha}{2} \right) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi\alpha}{2} \right)} = \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi\alpha}{2} \right) \sim \frac{\pi\alpha}{2}, \alpha \rightarrow 0 \right] = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{2\alpha}{\pi\alpha} = \frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$

Пример 1.25. Вычислить предел функции $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$.

Здесь числитель и знаменатель — бесконечно малые функции. Однако аргумент x не является бесконечно малой функцией (не стремится к нулю), поэтому соотношение $\sin 2x \sim 2x$ не имеет смысла. Введем бесконечно малую функцию: $\alpha = \pi - x \Rightarrow \alpha \rightarrow 0, x = \pi - \alpha$. Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin 2(\pi - \alpha)}{\sin 3(\pi - \alpha)} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin(2\pi - 2\alpha)}{\sin(3\pi - 3\alpha)} = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin(-2\alpha)}{\sin(\pi - 3\alpha)} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin(-2\alpha)}{\sin(3\alpha)} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{-2\alpha}{3\alpha} = -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

При вычислении пределов степенно-показательных функций вида u^v полезно пользоваться основным логарифмическим тождеством: $u = e^{\ln u}$. Тогда

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u^v = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(e^{\ln u} \right)^v = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} v \ln u}.$$

Пример 1.26. Вычислить предел функции $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^4 x - \sin^2 x}{5x^3 + 3x^5}$.

Имеем

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^4 x - \sin^3 x}{5x^3 + 3x^5} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin^4 x}{\cos^4 x} - \sin^3 x}{5x^3 + 3x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x \left(\frac{\sin x}{\cos^4 x} - 1 \right)}{x^3 (5 + 3x^2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x}{x^3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos^4 x} - 1}{5 + 3x^2} = 1 \cdot \frac{0 - 1}{5 + 0} = -\frac{1}{5}.\end{aligned}$$

ГЛАВА 2. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

2.1. Непрерывность функции в точке

Определение. Функция $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ называется непрерывной в точке x_0 (x_0 — предельная точка X), если существует

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0). \quad (2.1)$$

Обратим внимание на то, что условиями непрерывности функции в точке x_0 (при записи соотношения (2.1)) являются:

- 1) существование конечного значения $f(x_0)$;
- 2) существование конечного предела $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Так как $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$, то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right).$$

Следовательно, для непрерывных в точке функций можно переходить к пределу под знаком функции.

В *изолированной* точке x_0 любая функция f непрерывна.

Определение. Функция $f(x)$, не являющаяся непрерывной в точке x_0 , предельной для X , называется *разрывной* в ней. Точ-

ку x_0 называют *точкой разрыва функции* $f(x)$, причем функция $f(x)$ может быть не определена в этой точке.

Определение непрерывности функции в точке *по Коши*: функция f непрерывна в точке x_0 , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0 \quad \forall x \in X \left(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \right).$$

Определение непрерывности функции в точке *по Гейне*: функция f непрерывна в точке x_0 , если

$$\left((\forall (x_n) \subset X) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0) \right) \right).$$

2.2. Односторонняя непрерывность, связь с непрерывностью в точке

Определение. Функция $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ называется *непрерывной слева (справа)* в точке $x_0 \in X$, предельной для множества X , если

$$f(x_0 - 0) = f(x_0) \quad (f(x_0 + 0) = f(x_0)).$$

Критерий непрерывности функции в точке через односторонние пределы

Функция $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ непрерывна в точке $x_0 \in X$, предельной для множества X , тогда и только тогда, когда она непрерывна в этой точке и слева и справа, то есть

$$f(x_0 - 0) = f(x_0) = f(x_0 + 0). \quad (2.2)$$

Положим

$$\Delta x := x - x_0, \quad \Delta y = \Delta f(x_0) := f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Величину Δx называют *приращением аргумента*, а Δy — *приращением функции в точке*. Так как $x = x_0 + \Delta x$, то условие непрерывности (2.1) можно переписать в виде $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$. Отсюда $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0$

или

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x_0) = 0. \quad (2.3)$$

Равенство (2.3) называется *разностным условием непрерывности* функции в точке и служит практическим приемом доказательства непрерывности функции в точке.

Пример 2.1. Покажем, что функция $f(x) = x^3$ непрерывна в любой точке $x_0 \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} \text{Имеем } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left((x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3 \right) = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (x_0 + \Delta x - x_0) \left((x_0 + \Delta x)^2 + x_0(x_0 + \Delta x) + x_0^2 \right) = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x \left((x_0 + \Delta x)^2 + x_0(x_0 + \Delta x) + x_0^2 \right) = 0. \end{aligned}$$

Значит, функция $f(x) = x^3$ непрерывна во всякой точке x_0 .

2.3. Классификация точек разрыва

Пусть функция $f: X \rightarrow \mathbf{R}$, $x_0 \in X$ — предельная точка для множества X .

Определение. Если существует $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $A \neq f(x_0)$ ($f(x_0)$ может вообще не существовать), то точка x_0 называется *точкой устранимого разрыва*.

Замечание. В случае устранимого разрыва

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0).$$

Указанный разрыв *можно устранить*, если дополнить разрывную функцию $f(x)$ до непрерывности следующим образом:

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_0, \\ f(x_0), & x = x_0. \end{cases}$$

Пример 2.2. Функция $y = \frac{\sin x}{x}$ имеет в точке $x=0$ устранимый разрыв, так как $y(-0) = y(+0) = 1$: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Здесь $y(0)$ не существует.

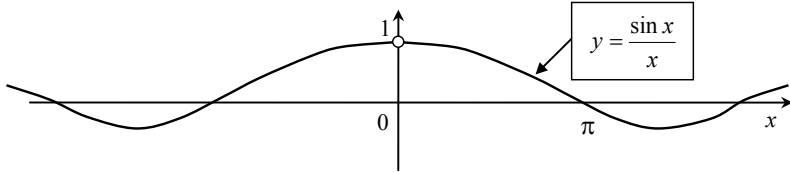


Рис. 2.1. Точка $x = 0$ — точка устранимого разрыва

Если положить $y(0) = 1$, то получим *непрерывную* функцию $\bar{y} = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$

Определение. Если существуют конечные односторонние пределы $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$, не равные между собой ($f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$) (значение $f(x_0)$ может также не существовать), то точка x_0 называется *точкой разрыва первого рода*.

Число $|f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)|$ называется *скачком функции* f в точке x_0 .

Во всех остальных случаях точку разрыва x_0 будем называть *точкой разрыва второго рода*.

Замечание. В случае разрыва второго рода хотя бы один из односторонних пределов бесконечен или вообще не существует.

Если односторонние пределы $f(x_0 - 0)$ или $f(x_0 + 0)$ бесконечны, то точку x_0 иногда называют *полюсом*.

Пример 2.3. Рассмотрим функцию $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$

Здесь точка x_0 — точка разрыва первого рода: $y(-0) = -1$, $y(+0) = 1$. Заметим, что скачок функции в этой точке равен $\eta = |y(+0) - y(-0)| = |1 - (-1)| = 2$ (рис. 1.4).

Пример 2.4. Функция $y = \sin \frac{1}{x}$ имеет в точке $x = 0$ разрыв

второго рода, так как $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ не существует (пример 1.7).

Пример 2.5. Исследуем поведение функции $y = 2^{\frac{1}{x-1}}$.

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} 2^{\frac{1}{x-1}} = \left| x-1 \rightarrow -0, \quad \frac{1}{x-1} \rightarrow -\infty \right| = [2^{-\infty}] = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} 2^{\frac{1}{x-1}} = \left| x-1 \rightarrow +0, \quad \frac{1}{x-1} \rightarrow +\infty \right| = [2^{+\infty}] = +\infty.$$

Функция $y = 2^{\frac{1}{x-1}}$ имеет в точке $x = 1$ разрыв второго рода. Прямая $x = 1$ является правой вертикальной асимптотой графика функции.

Исследуем поведение функции на бесконечности:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2^{\frac{1}{x-1}} = \left| \frac{1}{x-1} \rightarrow 0 \right| = [2^0] = 1. \text{ Поэтому прямая } y = 1 \text{ явля-}$$

ется горизонтальной асимптотой графика функции. Здесь $y(0) = \frac{1}{2}$ (рис. 2.2).

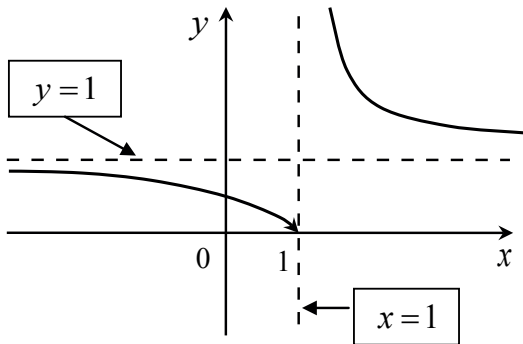


Рис. 2.2. График функции $y = 2^{\frac{1}{x-1}}$

Пример 2.6. Исследуем поведение функции $f(x) = E(x) = [x]$.

Напомним: $[x] := \{k, k \leq x < k+1, k \in \mathbb{Z}\}$. Здесь $f(k) = f(k+0) = k, f(k-0) = k-1$.

Точки $x = k \in \mathbb{Z}$ — точки разрыва первого рода. Функция непрерывна справа в точках $x = k$ (рис. 2.3).

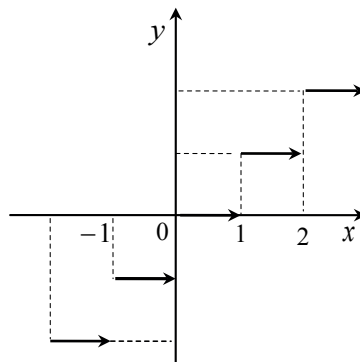


Рис. 2.3. График функции $f(x) = [x]$

Пример 2.7. Исследовать и построить схематически график функции $f(x) = \left| \frac{x^2 - 2x}{x - 2x^2} \right|$ (рис. 2.4).

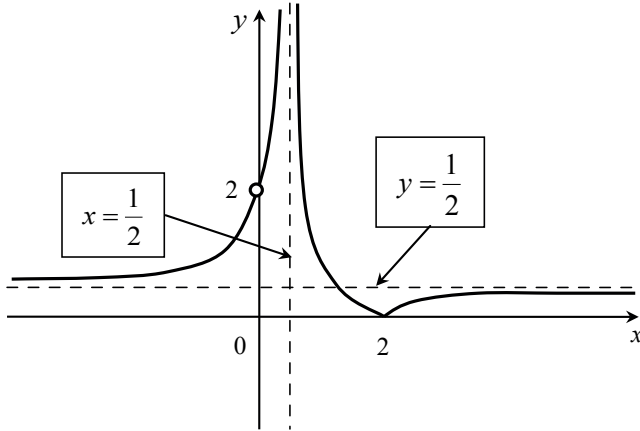


Рис. 2.4. График функции $f(x) = \left| \frac{x^2 - 2x}{x - 2x^2} \right|$

Точками разрыва данной функции являются точки, в которых знаменатель дроби равен нулю, то есть $x - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ или $x = \frac{1}{2}$. Исследуем поведение функции в окрестности этих точек.

Точка $x = 1/2$:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}-0} \left| \frac{x(x-2)}{x(1-2x)} \right| = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}-0} \left| \frac{x-2}{1-2x} \right| = \left| \frac{x - \frac{1}{2} \rightarrow -0, 1-2x \rightarrow +0,}{x-2 \rightarrow -\frac{3}{2}} \right| = \left\langle \left| \frac{-3/2}{+0} \right| \right\rangle = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}+0} \left| \frac{x(x-2)}{x(1-2x)} \right| = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}+0} \left| \frac{x-2}{1-2x} \right| = \left| \frac{x - \frac{1}{2} \rightarrow +0, 1-2x \rightarrow -0,}{x-2 \rightarrow -\frac{3}{2}} \right| = \left\langle \left| \frac{-3/2}{-0} \right| \right\rangle = +\infty.$$

Таким образом, точка $x=1/2$ является точкой разрыва второго рода. Прямая $x=1/2$ является вертикальной асимптотой графика функции.

$$\text{Точка } x=0: \lim_{x \rightarrow \pm 0} \left| \frac{x(x-2)}{x(1-2x)} \right| = \lim_{x \rightarrow \pm 0} \left| \frac{x-2}{1-2x} \right| = 2.$$

Имеем $f(-0)=f(+0)=2$, $f(0)$ не существует. Поэтому точка $x=0$ является точкой устранимого разрыва.

Исследуем поведение функции на бесконечности

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{x^2-2x}{x-2x^2} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{1-\frac{2}{x}}{\frac{1}{x}-2} \right| = \frac{1}{2}. \text{ Поэтому прямая } y=\frac{1}{2} \text{ является}$$

горизонтальной асимптотой графика функции. Заметим, что график функции пересекает ось Ox в точке $x=2$.

2.4. Свойства непрерывных функций

Пусть $f: X \rightarrow \mathbf{R}$, $x_0 \in X'$.

Теорема 1 (о локальной ограниченности)

Если функция непрерывна в точке, то она ограничена в некоторой окрестности этой точки.

Теорема 2 (об устойчивости знака непрерывной функции в точке)

Если функция f непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) \neq 0$, то $\exists O_\delta(x_0) \forall x \in X \cap O_\delta(x_0): \operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} f(x_0)$.

Доказательство. В самом деле так как $f(x)$ непрерывна в точке x_0 , то существует $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Тогда $\exists O_\delta(x_0) \forall x \in X \cap O_\delta(x_0): |f(x)| > \frac{|f(x_0)|}{2}$. При этом $f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$, если $f(x_0) > 0$, и $f(x) < \frac{f(x_0)}{2}$, если $f(x_0) < 0$.

Следствие. Пусть $f, g: X \rightarrow \mathbf{R}$, $x_0 \in X$, f и g непрерывны в точке x_0 и $f(x_0) > g(x_0)$. Тогда $\exists O_\delta(x_0): \forall x \in X \cap O_\delta(x_0) f(x) > g(x)$.

2.5. Арифметические операции над непрерывными функциями

Теорема 3. Сумма и произведение непрерывных функций непрерывны: если функции $f, g: X \rightarrow \mathbf{R}$ непрерывны в точке $x_0 \in X$, то функции $f \pm g$ и fg также непрерывны в этой точке.

Теорема 4. Функция $\frac{g}{f}$ непрерывна в точке x_0 , если функции f и g непрерывны в точке x_0 и $f(x_0) \neq 0$.

2.6. Теорема о непрерывности сложной функции

Теорема 5. Пусть $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$, функция f непрерывна в точке x_0 , $f(x_0) = y_0$ и функция g непрерывна в точке y_0 . Тогда сложная функция $h(x) = g(f(x))$ непрерывна в точке x_0 .

В самом деле,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = y_0, \quad (2.4)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(y) = g(y_0).$$

Согласно теореме о пределе композиции функций

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(y_0).$$

Из (2.4) вытекает, что $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(f(x_0))$. Теорема доказана.

Следствие. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$, а $g(y)$ непрерывна в точке y_0 , то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(y_0) = g\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)\right).$$

Итак, для непрерывной функции переход к пределу можно выполнять под знаком функции.

2.7. Непрерывность элементарных функций

Перечислим основные элементарные функции: x^α ($x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$) a^x ($a > 0$, $a \neq 1$), $\log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$), $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$.

Определение. Функции, полученные из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических операций и операций суперпозиции, называются *элементарными*.

Пример 2.8. Функции $f(x) = e^{\sqrt{\log_{\operatorname{tg} x} \frac{x^\alpha + 2^x}{\arcsin x}}}$, $x \in (0, 1)$ и $g(x) = |x| = \sqrt{x^2}$ являются элементарными.

Среди элементарных функций обычно выделяют:

— *целая рациональная функция*, или *многочлен*,

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n,$$

здесь n — степень многочлена, $n \in \mathbb{N}$; $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ — коэффициенты многочлена;

— *дробно-рациональная функция*, являющаяся отношением двух многочленов,

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}.$$

Целые рациональные и дробно-рациональные функции образуют так называемый *класс рациональных функций*.

К элементарным функциям относятся также *иррациональные функции*, которые представляют суперпозиции рациональных функций и степенных функций с дробно-рациональными показателями.

Рациональные и иррациональные функции образуют *класс алгебраических функций*. Элементарные функции, которые не являются алгебраическими, называются *трансцендентными функциями*.

Примеры 2.9. Примеры элементарных функций:

а) $f(x) = 4x^5 - 3x^2 + x - 6$ — целая рациональная функция, или многочлен пятой степени;

б) $f(x) = \frac{3x^4 - x^2 + 5}{x^3 + 2x + 3}$ — дробно-рациональная функция;

в) $f(x) = \frac{x^2 + \sqrt{x}}{3 - \sqrt[3]{x}}$ — иррациональная функция;

г) $f(x) = \cos x$, $g(x) = \sin x$, $h(x) = e^x$ — трансцендентные функции.

Пример 2.10. Пример *неэлементарной функции* — *функция Дирихле* $D(x) = \begin{cases} 1, & x - \text{рациональное число,} \\ 0, & x - \text{иррациональное число.} \end{cases}$

Теорема 6. Элементарные функции непрерывны в каждой точке своей области определения.

Пример 2.11. Функция $y = \sin x$ непрерывна и строго возрастает на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Поэтому существует непрерыв-

ная обратная функция, которую обозначают $x = \arcsin y$, определенная на отрезке $\left[\sin \left(-\frac{\pi}{2} \right), \sin \frac{\pi}{2} \right] = [-1, 1]$, возрастающая на нем.

Пример 2.12. Пусть $y = (f(x))^{g(x)}$, $f(x) > 0$, f и g непрерывны на множестве X .

Функция $y = (e^{\ln f(x)})^{g(x)}$ непрерывна по теореме 5.

В частности, $y = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbf{R}$, непрерывна $\forall x \in \mathbf{R}$.

Пример 2.13. Так как для непрерывной функции переход к пределу можно выполнять под знаком функции, то

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow x_0} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \right) \left(\lim_{x \rightarrow x_0} \ln f(x) \right)} = \\ &= e^{\left(\ln \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right) \left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \right)} = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}. \end{aligned}$$

2.8. Непрерывность функции на множестве

Определение. Функция $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ называется *непрерывной на множестве X* , если она непрерывна в каждой точке этого множества:

$$\begin{aligned} \forall x_0 \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0 \\ \forall x \in X \left(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \right). \end{aligned}$$

Пусть $f: [a; b] \rightarrow \mathbf{R}$.

Определение. Будем говорить, что f *непрерывна* на отрезке $[a; b]$ (запись: $f \in C[a; b]$), если f непрерывна в любой точке $x_0 \in (a; b)$, непрерывна в точке a справа и в точке b слева.

Теорема 7 (первая теорема Вейерштрасса³ об ограниченности функции, непрерывной на отрезке)

Функция непрерывная на отрезке, ограничена на нем.

Доказательство. Теорему докажем от противного. Предположим, что функция $f \in C[a; b]$ не является ограниченной на $[a; b]$, то есть $\forall M \exists x \in [a; b]: |f(x)| > M$.

Пусть $M = n, n \in \mathbb{N}$. Тогда при

$$M = 1 \exists x_1 \in [a; b]: |f(x_1)| > 1,$$

$$M = 2 \exists x_2 \in [a; b]: |f(x_2)| > 2,$$

.....

$$M = n \exists x_n \in [a; b]: |f(x_n)| > n,$$

.....

То есть для $\forall n \in \mathbb{N}$ существует точка $x_n \in [a; b]$, для которой $|f(x_n)| > n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$.

Последовательность (x_n) ограничена, так как все точки $x_n \in [a; b]$. Тогда, по теореме Больцано — Вейерштрасса, существует сходящаяся подпоследовательность $x_{n_k} : \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0$, причем $a \leq x_{n_k} \leq b$. По теореме о предельном переходе в неравенствах для последовательностей имеем: $x_0 \in [a; b]$.

Функция f непрерывна в точке x_0 , поэтому

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x_0) \quad (2.5)$$

(предел по Гейне). Но так как $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$, то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \infty. \quad (2.6).$$

Мы пришли к противоречию (сравните (2.5) и (2.6)), которое и завершает доказательство теоремы.

Замечание. Для функций, непрерывных на интервале, утверждение предыдущей теоремы, вообще говоря, не верно.

В этом легко убедиться на примере функции $f(x) = \frac{1}{x}$. Эта

¹ Вейерштрасс Карл (1815–1897) — немецкий математик, уделявший большое внимание логическому обоснованию математического анализа, вариационного исчисления, дифференциальной геометрии, линейной алгебры и др. Учитель Софьи Ковалевской.

функция непрерывна, но не ограничена на промежутке $(0; 1]$.

Пусть $f: X \rightarrow \mathbf{R}$, ограничена на множестве X и пусть $m := \inf \{f(x), x \in X\}$, $M := \sup \{f(x), x \in X\}$.

Тогда для $\forall x \in X$ $m \leq f(x) \leq M$.

Определение. Будем говорить, что функция f *достигает* своей *точной верхней грани (нижней грани)* на $X \subseteq \mathbf{R}$, если $\exists \beta \in X: f(\beta) = M$ ($\exists \alpha \in X: f(\alpha) = m$).

Пример 2.14. $X = [-2; 1]$, $f(x) = \begin{cases} x, & -2 \leq x < 0, \\ 1, & x = 0, \\ 1/x, & 0 < x \leq 1. \end{cases}$

Здесь $\sup_{x \in X} f(x) = +\infty$, $X = [-2; 1]$.

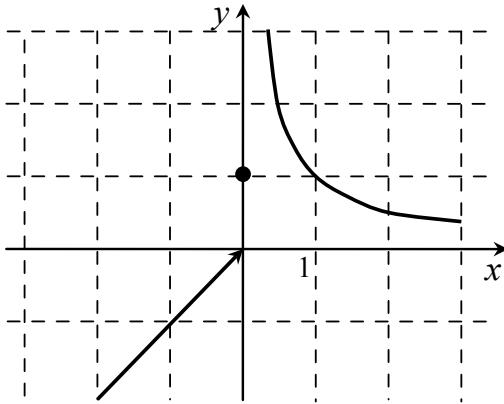


Рис. 2.5. Геометрическая иллюстрация примера 2.14

Пример 2.15. $X = [-1; 1]$, $f(x) = \begin{cases} 1+x, & -1 \leq x < 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0, \\ 1-x, & 0 < x \leq 1. \end{cases}$

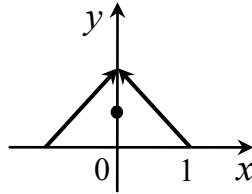


Рис. 2.6. Геометрическая иллюстрация примера 2.15

Здесь $\sup_{x \in X} f(x) = 1$, но нет числа $\beta = [-1; 1]$, такого что $f(\beta) = 1$.

Пример 2.16. $X = [-1; 1]$, $f(x) = 1 - |x| = \begin{cases} 1 + x, & -1 \leq x \leq 0, \\ 1 - x, & 0 < x \leq 1. \end{cases}$

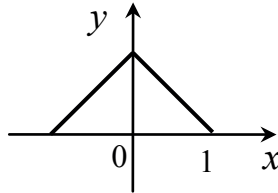


Рис. 2.7. Геометрическая иллюстрация примера 2.16

Здесь $\sup_{x \in X} f(x) = 1$, $\exists \beta = 0 \in [-1; 1]: f(0) = 1$, то есть $f(x)$ достигает точной верхней грани на множестве $X = [-1; 1]$.

Теорема 8 (вторая теорема Вейерштрасса)

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она достигает на этом отрезке своих точной верхней и точной нижней граней, то есть существуют числа $\alpha, \beta \in [a; b]$, такие что $f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta) \quad \forall x \in [a; b]$.

Доказательство. Доказательство проведем от противного. Предположим, что $\forall x \in [a; b] \quad f(x) < M$.

Рассмотрим функцию $F(x) = \frac{1}{M - f(x)} > 0 \quad \forall x \in [a; b]$. Так

как $M \neq f(x)$, то функция $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$. Тогда по первой теореме Вейерштрасса $\exists K \in \mathbf{R} \quad \forall x \in [a; b]$ $0 < F(x) \leq K$, то есть $\frac{1}{M - f(x)} \leq K \Rightarrow f(x) \leq M - \frac{1}{K}$. Поэтому число M не является наименьшей верхней гранью.

В самом деле, если взять $\varepsilon := \frac{1}{K}$, то нет числа $x \in [a; b]$, такого что $M - \frac{1}{K} < f(x) \leq M$.

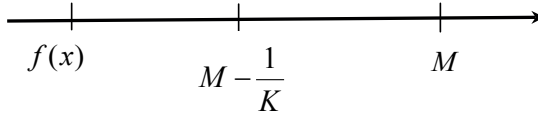


Рис. 2.8. К доказательству теоремы 7

Для точной нижней грани доказательство аналогично.

Таким образом, для непрерывной на отрезке $[a; b]$ функции можно говорить о максимальном и минимальном ее значениях:

$$\max_{x \in [a; b]} f(x) = \sup_{x \in [a; b]} f(x) = M, \quad \min_{x \in [a; b]} f(x) = \inf_{x \in [a; b]} f(x) = m.$$

Теоремы о корнях непрерывной функции

Теорема 9 (теорема Больцано¹ — Коши о нуле непрерывной функции)

Пусть $f \in C[a; b]$ и $f(a)f(b) < 0$. Тогда существует число $c \in (a; b)$, такое что $f(c) = 0$.

¹ Больцано Бернارد (1781–1848) — чешский математик, философ, теолог, автор первой строгой теории вещественных чисел и один из основоположников теории множеств. Только в конце XIX века историки обнаружили и оценили его строгое обоснование математического анализа.

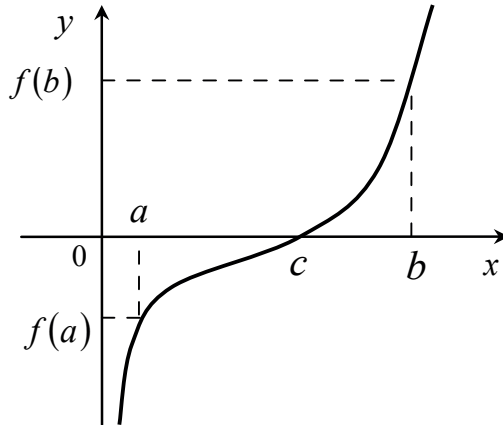


Рис. 2.9. Геометрическая иллюстрация теоремы 8

Доказательство. Пусть $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Разделим отрезок $[a; b]$ пополам. Тогда:

1) если $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, то $c = \frac{a+b}{2}$;

2) если $f\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0$, то обозначим $\left[a; \frac{a+b}{2}\right] = [a_1; b_1]$,

$f(a_1) < 0 < f(b_1)$;

3) если $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$, то обозначим $\left[\frac{a+b}{2}; b\right] = [a_1; b_1]$,

$f(a_1) < 0 < f(b_1)$.

Заметим, что длина отрезка $[a_1; b_1]$ в два раза меньше длины отрезка $[a; b]$.

Разделим теперь отрезок $[a_1; b_1]$ пополам и повторим предыдущие рассуждения. То есть если в точке деления функция обращается в ноль, то нужная точка уже найдена. В противном случае выберем тот из получившихся отрезков, в концах

которого функция принимает значения разных знаков. Обозначим этот отрезок $[a_2; b_2]$ и заметим, что $f(a_1) < 0 < f(b_1)$ и $b_2 - a_2 = \frac{1}{2}(b_1 - a_1)$.

Продолжим этот процесс. Если $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) = 0$, то $c = \frac{a_n + b_n}{2}$.

Если мы не встретим нуль функции на каком-то шаге, то получим последовательность вложенных отрезков $([a_n; b_n])$, длины которых $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Значит, согласно лем-

ме Коши — Кантора о вложенных отрезках, существует точка $c = \bigcap_{n=1}^{\infty} ([a_n; b_n])$.

Докажем, что $f(c) = 0$. Так как последовательность (a_n) монотонно возрастает и ограничена, то $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{n \in N} a_n =: \alpha$. Так как последовательность (b_n) монотонно убывает и ограничена, то $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \inf_{n \in N} b_n =: \beta$. Для каждого $n \in N$ $[\alpha; \beta] \subseteq [a_n; b_n]$, следовательно, $\alpha = \beta = c$.

Функция $f(x)$ непрерывна в точке $c \in (a; b)$, поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(c), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = f(c).$$

$$f(a_n) < 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \leq 0 \Rightarrow f(c) \leq 0, \quad (2.7)$$

$$f(b_n) > 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) \geq 0 \Rightarrow f(c) \geq 0. \quad (2.8)$$

Из (2.7) и (2.8) вытекает, что $f(c) = 0$. Теорема доказана.

Теорема 10 (о прохождении непрерывной на отрезке функции через любое промежуточное значение)

Пусть $f \in C[a; b]$ и $f(a) \neq f(b)$. Тогда для любого числа C , заключенного между $f(a)$ и $f(b)$, существует такое $c \in (a; b)$, что $f(c) = C$.

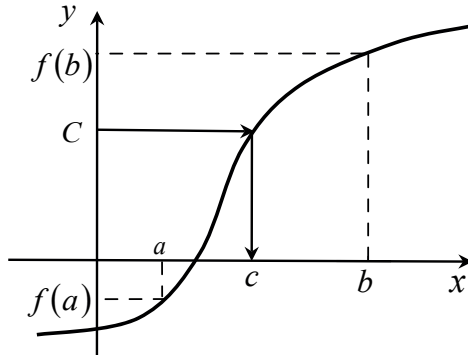


Рис. 2.10. Геометрическая иллюстрация теоремы 9

Доказательство. Рассмотрим функцию $g(x) := f(x) - C$. Функция $g(x)$ непрерывна на $[a; b]$ и $g(a)g(b) < 0$. Согласно теореме Больцано — Коши о нуле непрерывной функции $\exists c \in (a; b) : g(c) = 0$, то есть $f(c) = C$. Теорема доказана.

Следствие. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то

$$f([a; b]) = [m; M], \quad (2.9)$$

где $m = \inf \{f(x) : x \in [a; b]\}$, $M = \sup \{f(x) : x \in [a; b]\}$.

Другая формулировка следствия:

Если $f \in C[a; b]$, то $f([a; b]) = \left[\min_{x \in [a; b]} f(x), \max_{x \in [a; b]} f(x) \right]$.

2.9. Существование и непрерывность обратной функции

Приведем без доказательства следующие утверждения.

Лемма. Функция $f : [a; b] \rightarrow \mathbf{R}$, монотонная на отрезке $[a; b]$, непрерывна на нем тогда и только тогда, когда $f([a; b]) = [f(a); f(b)]$.

Теорема 11 (о существовании и непрерывности обратной функции)

Пусть функция $f : [a; b] \rightarrow \mathbf{R}$ строго возрастает (убывает) и непрерывна на $[a; b]$. Тогда:

- 1) $f([a; b]) = [f(a); f(b)]$;
- 2) функция $f : [a; b] \rightarrow f([a; b])$ обратима, то есть существует функция f^{-1} ;
- 3) обратная функция $f^{-1} : f([a; b]) \rightarrow [a; b]$ непрерывна и строго возрастает (убывает) на отрезке $[f(a); f(b)]$.

2.10. Определение равномерно непрерывной функции. Теорема Кантора¹

Пусть функция непрерывна на множестве $X \subset \mathbf{R}$. Это значит, что для любой точки $x_0 \in X$ и

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0 \forall x \in X (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon).$$

Здесь $\delta > 0$, вообще говоря, *зависит* и *от* ε и *от* x_0 .

Понятие равномерной непрерывности на множестве X — это более сильное ограничение на функцию, чем непрерывность функции.

Определение. Функция $f(x)$ называется *равномерно непрерывной* на множестве X , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \forall x_1, x_2 \in X (|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon).$$

Здесь δ *зависит только от* ε и не зависит от $x_1, x_2 \in X$.

Таким образом, для равномерно непрерывной функции значения функции близки, как только близки значения соответствующих аргументов, где бы они ни находились.

¹ Кантор Георг (1845–1918) — немецкий математик, создатель теории бесконечных множеств и родоначальник теоретико-множественных понятий в математике.

Если функция равномерно непрерывна на промежутке X , то она также является непрерывной на нем. Обратное утверждение неверно, как видно из следующих примеров.

Пример 2.18. Покажем, что функция $y = x^2$ не является равномерно непрерывной на \mathbf{R} .

Для функции $y = x^2$ для любой точки $x_0 \in \mathbf{R}$ имеем $(x_0 + \Delta x)^2 - (x_0)^2 = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 > 2x_0\Delta x$. Значит, если $\Delta x \rightarrow 0$, то разность $(x_0 + \Delta x)^2 - (x_0)^2$, вообще говоря, к нулю стремиться не обязана. Поэтому функция не является равномерно непрерывной.

Пример 2.19. Покажем, что функция $\sin \frac{1}{x}$ не является

равномерно непрерывной на множестве $X = (0; 2\pi]$.

Заметим, что $D(f) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Точка $x_0 = 0$ является предельной для $D(f)$.

Рассмотрим две последовательности:

$$x'_n = \frac{1}{\pi n} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \text{ для нее } f(x'_n) = \sin \pi n = 0,$$

$$x''_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi n} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \text{ для нее } f(x''_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) = (-1)^n.$$

$$\text{Тогда } |f(x'_n) - f(x''_n)| = 1, |x''_n - x'_n| = \frac{1}{\pi n(2n+1)} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Таким образом, разность двух значений аргументов стремится к нулю, а разность соответствующих значений функции нет.

Однако если функция непрерывна на отрезке, то ситуация меняется.

Теорема 12 (теорема Кантора)

Если функция непрерывна на отрезке, то она равномерно непрерывна на этом отрезке.

Доказательство. Предположим противное. Пусть функция $f(x)$ не является равномерно непрерывной на $[a; b]$. Тогда

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x_1 \in [a; b], \exists x_2 \in [a; b], \left(|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon_0 \right).$$

При каждом $n \in \mathbb{N}$ возьмем $\delta = \frac{1}{n}$. Тогда

$$\exists x_1^{(n)} \in [a; b], \exists x_2^{(n)} \in [a; b], \left(|x_1^{(n)} - x_2^{(n)}| < \frac{1}{n} \Rightarrow |f(x_1^{(n)}) - f(x_2^{(n)})| \geq \varepsilon_0 \right).$$

По теореме Больцано — Вейерштрасса из ограниченной последовательности $(x_1^{(n)})$ можно выделить сходящуюся к некоторой точке $x_0 \in [a; b]$ подпоследовательность.

Чтобы не усложнять обозначений, будем считать, что уже сама последовательность $x_1^{(n)} \rightarrow x_0$. Т.к. $|x_1^{(n)} - x_2^{(n)}| < \frac{1}{n}$, то $x_2^{(n)} \rightarrow x_0$. Поскольку функция непрерывна в точке x_0 , то в силу определения Гейне $f(x_1^{(n)}) \rightarrow f(x_0)$, $n \rightarrow \infty$. Тогда $f(x_2^{(n)}) \rightarrow f(x_0)$, $n \rightarrow \infty$. Отсюда $|f(x_1^{(n)}) - f(x_2^{(n)})| \rightarrow 0$, а это противоречит тому, что $|f(x_1^{(n)}) - f(x_2^{(n)})| \geq \varepsilon_0$. Значит, предположение неверно и функция равномерно непрерывна на отрезке $[a; b]$.

ГЛАВА 3. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

3.1. Производная функции в точке

Пусть функция $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ определена на множестве $X \subset \mathbf{R}$ и $x_0 \in X$ — предельная точка множества X . Напомним: для любой точки $x \in X$ приращение Δx определяется формулой $\Delta x := x - x_0$. Приращением функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется функция аргумента Δx :

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = \Delta f(x_0, \Delta x) := f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Определение. Если существует конечный предел $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, то значение этого предела называют производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 , обозначают $y'(x_0)$ или $f'(x_0)$.

Используются и другие символические обозначения производной:

$$y', f'(x) \text{ — Лагранж}^1,$$

¹ Жозеф Луи Лагранж (1736–1813) — знаменитый французский математик и механик, член Парижской АН. Ему принадлежат выдающиеся исследования по различным вопросам математического анализа, теории чисел, алгебре, дифференциальным уравнениям, астрологии и др.

y'_x, \dot{y}_x — Ньютон¹,

$\frac{dy}{dx}, \frac{df(x)}{dx}$ — Лейбниц².

Таким образом, по определению

$$y'(x_0) = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad (3.1)$$

где $x = x_0 + \Delta x$.

Пример 3.1. Найдем производную функции $y = \sin x$ в любой точке x области определения:

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \cos x.$$

Следовательно, функция $y = \sin x$ имеет в каждой точке x производную $(\sin x)' = \cos x$.

Экономисты используют для обозначения производной также символ $Mf(x_0)$ (т.е. $Mf(x_0) := f'(x_0)$) и термин *маржинальное значение функции в точке x_0* .

Физический смысл производной

Производная $f'(x_0)$ — скорость изменения функции в точке x_0 . В частности если x — время, $y = f(x)$ — координата

¹ Исаак Ньютон (1642–1727) — английский физик, механик, астроном и математик. Разработал (наряду с Лейбницем) основы дифференциального и интегрального исчисления.

² Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646–1716) — немецкий философ-идеалист, физик, математик, изобретатель, историк. В математике важнейшей заслугой Лейбница (наряду с И. Ньютоном и независимо от него) является разработка дифференциального и интегрального исчисления. Лейбниц изобрел первый интегрирующий механизм и уникальную для того времени счетную машину.

та точки, движущейся по прямой в момент x , то $f'(x_0)$ — мгновенная скорость точки в момент времени x_0 .

Геометрический смысл производной.

Связь с существованием касательной

Пусть Γ — график функции $y = f(x)$; $A(x_0; f(x_0))$, $B(x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x))$ — две точки графика функции Γ (рис. 3.1).

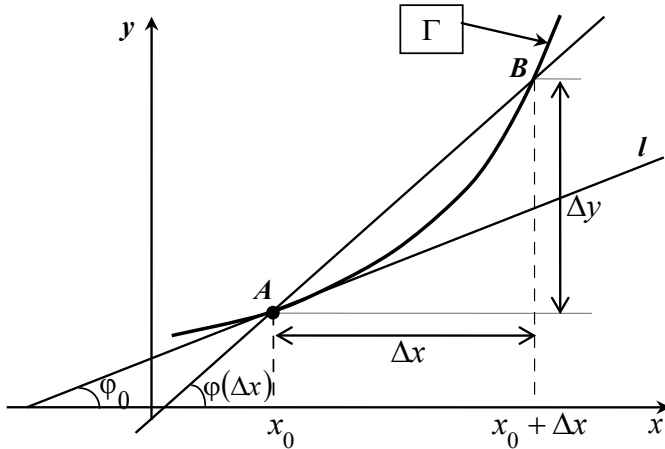


Рис. 3.1. Геометрический смысл производной

Угол между секущей AB и осью Ox обозначим $\phi(\Delta x)$.

Определение. Если существует $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \phi(\Delta x) = \phi_0$, то прямая l с угловым коэффициентом $k = \operatorname{tg} \phi_0$, проходящая через точку $A(x_0; f(x_0))$, называется касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке A .

Теорема 3.1. График функции f имеет в точке $A(x_0; f(x_0))$ касательную тогда и только тогда, когда функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 производную $f'(x_0)$.

Доказательство

Необходимость. Пусть $\exists \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \phi(\Delta x) = \phi_0$. Так как функция $\operatorname{tg} \phi$ непрерывна, то $\exists \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \phi(\Delta x) = \operatorname{tg} \phi_0$. Но $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \phi(\Delta x)$. Поэтому $\exists \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, то есть функция f имеет в точке x_0 конечную производную $f'(x_0)$.

Достаточность. Если существует $f'(x_0)$, то есть $\exists \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, то $\exists \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \phi(\Delta x)$. Так как функции $\operatorname{tg} t$, $\operatorname{arctg} t$ непрерывные, то $\exists \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \phi(\Delta x)$, то есть существует касательная к графику функции в точке $(x_0; f(x_0))$.

Замечание. Так как $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \phi(\Delta x)$, то при $\Delta x \rightarrow 0$ получаем $f'(x_0) = \operatorname{tg} \phi_0$.

Таким образом, $f'(x_0)$ — это тангенс угла наклона касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0; f(x_0))$.

Уравнения касательной и нормали

Найдем уравнение касательной. Будем искать его в виде $y = kx + b$. Так как $A \in \Gamma$, то $f(x_0) = kx_0 + b$, откуда $b = f(x_0) - kx_0$. Поскольку угловой коэффициент касательной $k = f'(x_0)$, то ее уравнение имеет вид

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Определение. Нормальной прямой (или нормалью) к графику функции $f(x)$ в точке x_0 называется прямая, проходящая через точку $M(x_0; f(x_0))$ перпендикулярно касательной в этой точке.

Угловой коэффициент нормали связан с угловым коэффициентом касательной формулой

$$k_{\text{н}} = -\frac{1}{k_{\text{кас}}} = -\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Уравнение нормали к графику функции в точке $M(x_0; f(x_0))$:

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0).$$

Односторонние производные

Пусть $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ определена на множестве $X \subset \mathbf{R}$ и x_0 — предельная точка $X \cap \{x \in X : x < x_0\}$ ($X \cap \{x \in X : x > x_0\}$).

Если существует конечный предел $\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, то его называют *левой производной функции f в точке x_0* и обозначают $f'_-(x_0) = f'(x_0 - 0)$. Аналогично $f'_+(x_0) = f'(x_0 + 0) := \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Число $f'_+(x_0) = f'(x_0 + 0)$ (если оно существует), называется *правой производной функции f в точке x_0* .

Если в точке x_0 функция f непрерывна и имеет левую и правую производные $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$, причем $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$, то в точке x_0 (рис. 3.2) график функции касательной не имеет. Но существуют две односторонние полукасательные, или, что то же самое, правая и левая касательные.

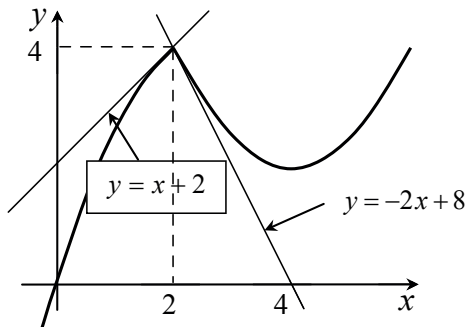


Рис. 3.2. Геометрическая иллюстрация односторонних полукасательных

Пример 3.4. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + 3x, & x \leq 2, \\ \frac{1}{2}x^2 - 4x + 10, & x > 2. \end{cases}$$

Найдем левую и правую касательные к графику функции в точке $x_0 = 2$.

$$\text{Имеем } \left(-\frac{1}{2}x^2 + 3x \right)' \Big|_{x=2} = (-x + 3) \Big|_{x=2} = 1,$$

$$\left(\frac{1}{2}x^2 - 4x + 10 \right)' \Big|_{x=2} = (x - 4) \Big|_{x=2} = -2.$$

$$\text{Заметим, что } \left(-\frac{1}{2}x^2 + 3x \right)' \Big|_{x=2} = \left(\frac{1}{2}x^2 - 4x + 10 \right)' \Big|_{x=2} = 4.$$

Уравнение левой касательной: $y - 4 = x - 2 \Leftrightarrow y = x + 2$. Аналогично находим уравнение правой касательной $y - 4 = -2(x - 2) \Leftrightarrow y = -2x + 8$ (рис. 3.2).

Теорема 3.2. Пусть x_0 — предельная точка X . Функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0 тогда и только тогда, когда $\exists f'_-(x_0)$, $\exists f'_+(x_0)$, причем $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.

Пример 3.5. $f(x) = |x|$. $x_0 = 0$.

$$\text{Имеем: } \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{|\Delta x| - 0}{\Delta x} = -1 = f'_-(0), \quad \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{|\Delta x| - 0}{\Delta x} = +1 = f'_+(0).$$

Так как $f'_-(0) \neq f'_+(0)$, функция $|x|$ не имеет производной в нуле.

Пример 3.6. Пусть $y := x|x|$. Выясним, существует ли производная этой функции в точке $x_0 = 0$.

Имеем:

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_0 + \Delta x)|x_0 + \Delta x| - x_0|x_0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} |\Delta x| = 0.$$

Итак, функция $y = x|x|$ в точке $x_0 = 0$ имеет производную $y'(0) = 0$.

Пример 3.7.
$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 = f(0)$, то есть $f(x)$ непрерывна в точке $x = 0$. Однако $f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x \sin \frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{\Delta x}$ не существует.

Действительно, если $\frac{1}{\Delta x} = \pi n \Rightarrow \sin \frac{1}{\Delta x} = 0$, а если

$$\frac{1}{\Delta x} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \Rightarrow \sin \frac{1}{\Delta x} = 1.$$

Следовательно, предел по Гейне не существует.

Бесконечные производные

Если функция f непрерывна в точке x_0 и $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ равен $+\infty$ или $-\infty$, то говорят, что функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 *бесконечную производную* (равную $+\infty$ или $-\infty$ соответственно). В этом случае *касательная к графику функции*

в точке A параллельна оси Oy ($\operatorname{tg} \phi_0 = \infty$), и так как она проходит через точку $(x_0; f(x_0))$, то ее уравнение имеет вид: $x = x_0$.

Пример 3.2. Рассмотрим функцию $y = \sqrt{|x|}$, $x_0 = 0$.

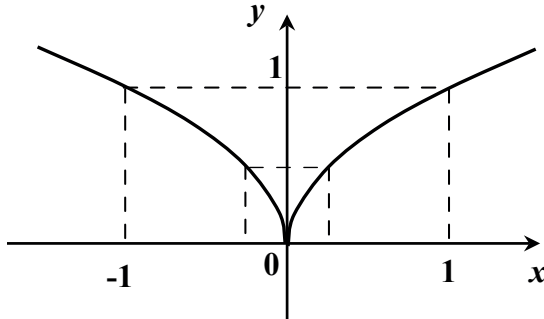


Рис. 3.3. График функции $y = \sqrt{|x|}$

$$\text{Имеем } y'(-0) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\sqrt{|\Delta x|} - 0}{\Delta x} = -\infty,$$

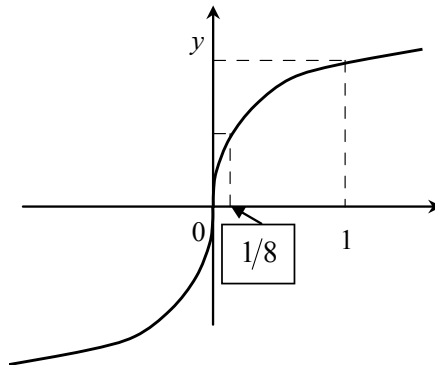
$$y'(+0) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\sqrt{|\Delta x|} - 0}{\Delta x} = +\infty. \text{ Поэтому прямая } x = 0 \text{ — верти-}$$

кальная касательная к графику функции (рис. 3.3).

Пример 3.3. Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 0$.

$$\text{Имеем: } y'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x} - 0}{\Delta x} = +\infty. \text{ Следовательно, прямая}$$

$x = 0$ — вертикальная касательная к графику функции (рис. 3.4).

Рис. 3.4. График функции $y = \sqrt[3]{x}$

3.2. Дифференцируемость функции одной переменной

Определение функции, дифференцируемой в точке

Функция $f: X \rightarrow \mathbf{R}$, определенная на множестве $X \subset \mathbf{R}$, называется *дифференцируемой в точке* $x_0 \in X$, предельной для множества X , если существует такая *линейная* относительно приращения $\Delta x = x - x_0$ функция $A \cdot \Delta x$ (A — некоторое число), что приращение $\Delta f(x_0, \Delta x)$ функции f представимо в виде

$$\Delta f(x_0, \Delta x) = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \Delta x, \quad \Delta x \rightarrow 0, \quad (3.2)$$

где $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0$. Так как $\alpha(\Delta x) \Delta x = o(\Delta x)$, то (3.2) можно записать в виде:

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = A \cdot \Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \rightarrow 0.$$

Теорема 3.3 (необходимое и достаточное условие дифференцируемости)

Для того чтобы функция f была дифференцируемой в точке x_0 , необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке конечную производную.

Доказательство. Необходимость. Пусть функция f дифференцируема в точке x_0 . Тогда ее приращение можно представить в виде (3.2). Имеем

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (A + \alpha(\Delta x)) = A.$$

Следовательно, производная $f'(x_0)$ существует и $f'(x_0) = A$.

Достаточность. Пусть существует конечная производная $f'(x_0) = A$. Тогда, по определению производной, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A$.

Положим:

$$\alpha(\Delta x) := \begin{cases} \frac{\Delta y}{\Delta x} - A, & \Delta x \neq 0, \\ 0, & \Delta x = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Функция $\alpha(\Delta x)$ является бесконечно малой при $\Delta x \rightarrow 0$ и непрерывной при $\Delta x = 0$. Действительно,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} - A \right) = A - A = 0.$$

Кроме того, из (3.3) вытекает $\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \Delta x$. Тем самым доказано, что функция f дифференцируема в точке x_0 .

Теорема 3.4 (о непрерывности дифференцируемой функции в точке)

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 , то она непрерывна в этой точке.

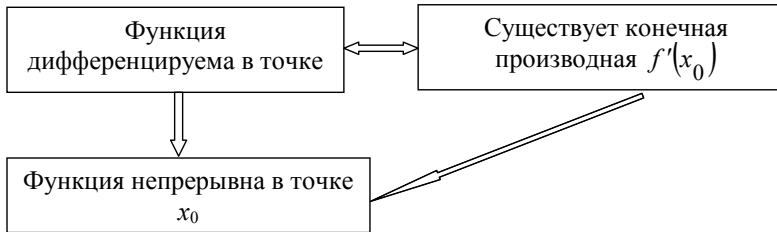
Доказательство. Из (3.2) вытекает равенство $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$, то есть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 .

Обратное утверждение неверно. Непрерывность функции в точке является необходимым условием существова-

ния производной функции в этой точке, но не является достаточным.

В самом деле, пусть $y := |x|$. Функция $|x|$ не имеет производной в нуле (пример 3.4), хотя она и непрерывна в любой точке $x \in \mathbf{R}$.

Связь понятий: *непрерывность функции, дифференцируемость функции, существование производной* можно представить следующей схемой:



3.3. Правила вычисления производных

Теорема 3.5. Пусть функции $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ и $g: X \rightarrow \mathbf{R}$ имеют в точке x_0 , предельной для $X \subset \mathbf{R}$, конечные производные $f'(x_0)$ и $g'(x_0)$. Тогда в этой точке существуют производные $(f \pm g)'(x_0)$, $(f \cdot g)'(x_0)$, $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)$, если $g(x_0) \neq 0$,

и выполняются равенства:

1. $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$.
2. $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$.
3. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$, $g(x_0) \neq 0$.

Доказательство

1. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\Delta(f \pm g)(x_0)}{\Delta x} &= \frac{[f(x_0 + \Delta x) \pm g(x_0 + \Delta x)] - [f(x_0) \pm g(x_0)]}{\Delta x} = \\ &= \frac{[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] \pm [g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)]}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Так как существуют производные $f'(x_0)$ и $g'(x_0)$, то переходя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, получим:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta(f \pm g)(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \pm g'(x_0).$$

$$\begin{aligned} 2. \text{ Имеем } \frac{\Delta(f \cdot g)(x_0)}{\Delta x} &= \frac{f(x_0 + \Delta x)g(x_0 + \Delta x) - f(x_0)g(x_0)}{\Delta x} = \\ &= g(x_0 + \Delta x) \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} + f(x_0) \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Так как $g'(x_0)$ существует, то функция g непрерывна в точке x_0 . Поэтому $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x_0 + \Delta x) = g(x_0)$. Значит,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta(f \cdot g)(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).$$

Следствие

$$(c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0),$$

если C — постоянная величина.

3. Сначала рассмотрим случай, когда $f(x) \equiv 1$, т. е. получим формулу для производной дроби $\frac{1}{g(x)}$. Имеем

$$\frac{\Delta\left(\frac{1}{g}\right)(x_0)}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{g(x_0 + \Delta x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{\Delta x} = -\frac{1}{\Delta x} \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{g(x_0)g(x_0 + \Delta x)}. \quad (3.4)$$

Так как функция g непрерывна в точке x_0 и $g(x_0) \neq 0$, то существует такая окрестность $O_\delta(x_0)$, что для любого $x \in O_\delta(x_0)$ функция $g(x)$ сохраняет знак, т. е. $g(x) \neq 0$. Выражение в правой части (3.4) имеет предел при $\Delta x \rightarrow 0$, поэтому существует

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\left(\frac{1}{g}\right)(x_0)}{\Delta x} = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}, \text{ т. е.}$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}}.$$

Теперь с помощью формулы для производной произведения получим:

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0) \cdot \frac{1}{g(x_0)} + f(x_0) \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \\ &= \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}, \quad g(x_0) \neq 0, \text{ т. е.} \end{aligned}$$

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}, \quad g(x_0) \neq 0}.$$

3.4. Дифференцирование сложной функции

Теорема 3.6 (о дифференцировании сложной функции)

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 , а функция $z = g(y)$ дифференцируема в точке $y_0 := f(x_0)$,

то функция $h(x) := (g \circ f)(x) = g(f(x))$ дифференцируема в точке x_0 и имеет место равенство

$$h'(x_0) = (g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0). \quad (3.5)$$

Доказательство. Дадим приращение Δx переменной x и обозначим соответствующее приращение функции $f(x)$ через Δy . Тогда $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta y = y_0 + \Delta y$. Заметим также, что из дифференцируемости $f(x)$ в точке x_0 следует ее непрерывность в этой точке: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$. Учитывая эти замечания, находим производную:

$$\begin{aligned} h'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(f(x_0 + \Delta x)) - g(f(x_0))}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(y_0 + \Delta y) - g(y_0)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(y_0 + \Delta y) - g(y_0)}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(y_0 + \Delta y) - g(y_0)}{\Delta y} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = g'(y_0) \cdot f'(x_0) = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(y_0 + \Delta y) - g(y_0)}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(y_0 + \Delta y) - g(y_0)}{\Delta y} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = g'(y_0) \cdot f'(x_0). \end{aligned}$$

Итак, мы получили формулу

$$\boxed{(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)}.$$

Замечание. Так как производная $z' = \frac{dz}{dx}$, то для производной сложной функции верна формула $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$.

3.5. Дифференцирование обратной функции

Теорема 3.7 (о производной обратной функции)

Пусть функция $f(x)$ строго монотонна и непрерывна в окрестности точки x_0 . Если существует $f'(x_0) \neq 0$, то обратная

функция $f^{-1}(y)$ существует в некоторой окрестности точки $y_0 := f(x_0)$ и имеет в этой точке производную, и справедливо равенство

$$\left(f^{-1}(y) \right)'_{y_0} = \frac{1}{f'(x_0)},$$

т. е.

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

Доказательство

В силу непрерывности функции $y = f(x)$ в точке x_0 из $\Delta x \rightarrow 0$ следует $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \rightarrow 0$. Так как обратная функция $x = f^{-1}(y)$ в силу монотонности функции $f(x)$ существует и непрерывна в точке y_0 , то из того, что $\Delta y \rightarrow 0$, вытекает $\Delta x \rightarrow 0$. Таким образом, в нашем случае условия $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta y \rightarrow 0$ равносильны.

Так как функция $f^{-1}(y)$ строго монотонна, то из неравенства $\Delta y \neq 0$ следует неравенство $\Delta x \neq 0$. Поэтому $\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{\frac{\Delta x}{\Delta y}}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$.

Если $f'(x_0) \neq 0$, то, пользуясь равносильностью условий $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta y \rightarrow 0$, находим $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Таким образом, $x'_y = \frac{1}{y'_x}$.

3.6. Производные некоторых элементарных функций (таблица производных)

$$1. c' = 0, \text{ где } c — \text{постоянная величина.}$$

$$2. (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, x > 0, \alpha \in \mathbf{R}, \text{ в частности,}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$3. (a^x)' = a^x \ln a \ (a > 0, a \neq 1), \text{ в частности, } (e^x)' = e^x.$$

$$4. (\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e \ (a > 0, a \neq 1), \text{ в частности, } (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

$$5. (\sin x)' = \cos x, (\cos x)' = -\sin x.$$

$$6. (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$7. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$8. (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

$$9. \operatorname{sh}'(x) = \operatorname{ch}(x), \quad \operatorname{ch}'(x) = \operatorname{sh}(x), \quad \operatorname{th}'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)},$$

$$\operatorname{cth}'(x) = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2(x)}.$$

Докажем справедливость этих формул. Будем использовать определение производной, эквивалентные бесконечно малые и правила вычисления производных.

1. $y = c$, где c — постоянная величина.

$$\text{Производная } y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c - c}{\Delta x} = 0.$$

2. $y = x^\alpha$.

Производная

$$\begin{aligned} (x^\alpha)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^\alpha - x^\alpha}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^\alpha \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha - 1 \right]}{\Delta x} = \\ &= \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha - 1 \sim \alpha \cdot \frac{\Delta x}{x}, \Delta x \rightarrow 0 \right] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^\alpha \cdot \alpha \cdot \Delta x}{x \cdot \Delta x} = \alpha x^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

Для сложной степенной функции имеем формулу производной

$$\left[(u(x))^n \right]' = n \cdot (u(x))^{n-1} \cdot u'(x),$$

или в краткой записи

$$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'.$$

3. $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1 \Rightarrow x = \log_a y$.

Пользуясь теоремой о производной обратной функции, находим: $(a^x)' = \frac{1}{(\log_a y)'} = \frac{1}{\frac{1}{y}(\log_a e)} = \frac{y}{\log_a e} = a^x \ln a$.

Для сложной показательной функции имеем $(a^{u(x)})' = a^{u(x)} \cdot \ln a \cdot u'(x)$, или в краткой записи,

$$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'.$$

4. $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$.

Приращение $\Delta y = \log_a (x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$.

Производная

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_a \left(\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} \right)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}.$$

Для сложной логарифмической функции

$$(\log_a u(x))' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{u'(x)}{u(x)},$$

или

$$\boxed{(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}}.$$

5. $y = \sin x$.

Ранее было доказано, что $(\sin x)' = \cos x$.

Для сложной функции

$$(\sin u)' = \cos u \cdot u'.$$

Для функции $y = \cos x$ аналогично $(\cos x)' = -\sin x$.

Для сложной функции

$$\boxed{(\cos u)' = -\sin u \cdot u'}.$$

6. $y = \operatorname{tg} x$.

Производная

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x + \Delta x) - \operatorname{tg} x}{\Delta x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin(x + \Delta x)}{\cos(x + \Delta x)} - \frac{\sin x}{\cos x}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\cos(x + \Delta x) \cos x} \cdot \frac{1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(x + \Delta x) \cos x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

и для сложной функции

$$\boxed{(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}}.$$

Производная функции $y = \operatorname{ctg} x$ находится аналогично.

$$7. y = \arcsin x, |x| < 1 \Rightarrow x = \sin y, |y| < \frac{\pi}{2}.$$

Пользуясь теоремой о производной обратной функции, находим:

$$\begin{aligned} (\arcsin x)' &= \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 (\arcsin x)}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad -1 < x < 1. \end{aligned}$$

Для нахождения производной функции $y = \arccos x$ воспользуемся известной тригонометрической формулой

$$\boxed{\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}}:$$

$$y' = (\arccos x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x \right)' = (-\arcsin x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Для сложной функции $\boxed{(\arcsin u)' = -(\arccos u)' = \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}}.$

$$8. y = \operatorname{arctg} x, x \in \mathbf{R} \Rightarrow x = \operatorname{tg} y \text{ при } |y| < \frac{\pi}{2}.$$

Производная

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'}, \cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 (\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Для нахождения производной функции $y = \operatorname{arcsctg} x$ можно воспользоваться известной тригонометрической формулой $\boxed{\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcsctg} x = \frac{\pi}{2}}$ аналогично предыдущему случаю.

Для сложной функции

$$\boxed{(\operatorname{arctg} u)' = -(\operatorname{arcsctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}}.$$

9. Для нахождения производных этого пункта воспользуемся формулами:

$$\boxed{\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \operatorname{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}},$$

$$\boxed{\operatorname{cth}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}}$$

и правилами вычисления производных.

Рассмотрим еще один способ нахождения производных.

3.7. Логарифмическая производная

Определение. Логарифмической производной функции $y = f(x)$ называется производная $(\ln|y|)'$.

Так как $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, то по правилу дифференцирования сложной функции получим следующее соотношение для логарифмической производной

$$\boxed{(\ln|y|)' = \frac{y'}{y}}. \quad (3.6)$$

Если производную y' рассматривать как скорость изменения функции y , то величину $\frac{y'}{y}$ естественно считать от-

носительной скоростью изменения, или темпом роста функции y .

С помощью логарифмической производной удобно вычислять производную в тех случаях, когда логарифмирование упрощает вид функции. Такое вычисление основано на формуле

$$y' = y \cdot (\ln |y|)' , \quad (3.7)$$

полученной из соотношения (3.6) умножением на y .

Используя формулу (3.7), найдем производную функции вида $y = u^v$, где $u = u(x) > 0$, $v = v(x)$ — дифференцируемые функции:

$$y' = y \cdot (\ln y)' = u^v (v \ln u)' = u^v \left(v' \ln u + v \frac{u'}{u} \right).$$

Пример 3.8. Найти производную функции $y = x^3 \cdot (\sqrt{x})^{\ln^2 x}$, $x > 0$.

$$\text{Найдем } \ln y = (3 \ln x + (\ln^2 x) \cdot \ln \sqrt{x}) = 3 \ln x + \frac{1}{2} \ln^3 x.$$

Дифференцируя левую и правую часть, получим:

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{x} + \frac{1}{2} \cdot 3 \ln^2 x \cdot \frac{1}{x}.$$

$$\text{Отсюда } y' = y \cdot \left(\frac{3}{x} + \frac{3}{2} (\ln^2 x) \cdot \frac{1}{x} \right) = 3x^2 (\sqrt{x})^{\ln^2 x} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} (\ln^2 x) \right).$$

Пример 3.9. Пусть $K = K(t)$ — приближенная величина вклада в момент времени t . Можно ли определить (приближенно) ставку банковского процента r по функции $K(t)$?

Решение. Пусть r — номинальная ставка за год, Δt — доля года, тогда проценты за период времени Δt составят $K \cdot r \cdot \Delta t$. Так как приращение вклада и проценты по вкладу — одно и то же, то $\Delta K = K \cdot r \cdot \Delta t$. Отсюда

$$r = \frac{\Delta K}{K \Delta t}. \quad (3.8)$$

Предположим, что функция $K(t)$ имеет производную $K'(t)$. Тогда мы можем заменить в равенстве (3.8) приращение ΔK на дифференциал $dK = K' \Delta t$, в результате получим $r \approx \frac{K' \Delta t}{K \Delta t} = \frac{K'}{K} = (\ln K)'$.

Вывод: ставка банковского процента r совпадает с логарифмической производной от величины вклада.

Упражнение. Пусть $K(t) = K_0(t+1)^{1.5}$, где t — число лет от открытия вклада, K_0 — величина вклада в начальный момент времени $t = 0$. Какой будет ставка банковского процента: а) через 2 года; б) через 5 лет? Какова при этом абсолютная скорость (производная K') роста вклада?

Пример 3.10. Пусть $A(t)$ — стоимость некоторого актива A в момент времени t , r — доходность от вложения денег в другие активы. Считаем для простоты, что r не зависит от времени. Когда выгодно покупать или продавать актив A ?

Решение. Найдем интервал времени, в течение которого мгновенная доходность актива A будет больше r . Так как мгновенная доходность совпадает с темпом роста его стоимости, то искомый интервал времени задается неравенством

$$(\ln A(t))' > r. \quad (3.9)$$

Если неравенство (3.9) задает интервал $(t_1; t_2)$, то актив следует купить в момент времени t_1 и продать в момент t_2 . Если же множество (3.9) является объединением двух интервалов $(-\infty; t_1) \cup (t_2; +\infty)$, то актив A выгодно продать в момент t_1 и снова купить в момент t_2 .

Упражнение. Пусть $r = 10\%$ годовых, $A(t) = C \cdot e^{0.2\sqrt{t-1}}$, $C = \text{const}$. В какой момент времени выгоднее всего купить (продать) актив A ?

3.8. Эластичность функции и ее свойства

Пусть величина y зависит от x , и эта зависимость описывается функцией $y = f(x)$. Встает вопрос, как измерить чувствительность зависимой переменной y к изменению x . Одним из показателей реагирования одной переменной на изменение другой служит производная. Однако в экономике этот показатель неудобен тем, что он зависит от выбора единиц измерения. Поэтому для измерения чувствительности изменения функции к изменению аргумента в экономике изучают связь не абсолютных переменных x и y , а их относительных изменений.

Определение. Эластичностью $E_x(y)$ функции $y = f(x)$ по аргументу в точке x называется предел отношения относительного изменения функции y к относительному изменению переменной x при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$E_x(y) := \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y} \right) = \frac{x}{y} \cdot y' = x \cdot \frac{y'}{y}. \quad (3.10)$$

Если эластичность представить в виде

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta y}{y} \cdot 100\%}{\frac{\Delta x}{x} \cdot 100\%},$$

то легко видеть, что она показывает приближенно, на сколько процентов изменится функция $y = f(x)$ при изменении независимой переменной на 1%. Перепишем формулу эластичности в виде

$$E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{\frac{f(x)}{x}} = \frac{Mf}{Af},$$

где Mf — маржинальное значение функции f в точке x ,
 $Af := \frac{f(x)}{x}$ — среднее значение функции в точке x . То есть

эластичность функции может быть представлена в виде отношения предельной (Mf) и средней (Af) величин.

Так как $d \ln y = \frac{dy}{y}$, а $d \ln x = \frac{dx}{x}$, то эластичность можно

представить в форме «логарифмической производной»:

$$E_x(y) = \frac{d(\ln y)}{d(\ln x)}.$$

Геометрическая интерпретация эластичности

Рассмотрим сначала случай *возрастающей* функции. По определению эластичности

$$E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot y' = \langle y' = \operatorname{tg} \alpha \rangle = \frac{x}{y} \operatorname{tg} \alpha,$$

где α — угол наклона касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0, y_0)$ (рис. 3.5). Из треугольника BMN $MN = BN \cdot \operatorname{tg} \alpha = x_0 \operatorname{tg} \alpha$. Треугольники BMN и AMC подобны, поэтому $\frac{MB}{MA} = \frac{MN}{MC} = \frac{x_0 \operatorname{tg} \alpha}{y_0} = E_x(y)$.

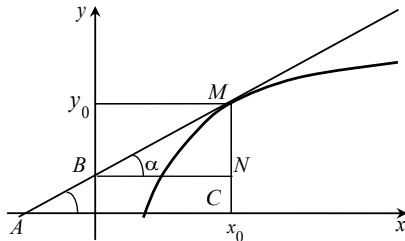


Рис. 3.5. $E_x(y) = \frac{MB}{MA}$

Т.е. эластичность *возрастающей* функции равна отношению расстояний по касательной от данной точки графика функции $M(x_0, y_0)$ до точек ее пересечения с осями ординат и абсцисс. Если точки A и B лежат по одну сторону от точки $M(x_0, y_0)$, то $E_x(y) > 0$, если по разные стороны, то $E_x(y) < 0$. Рассмотрим случай *убывающей* функции (рис. 3.6).

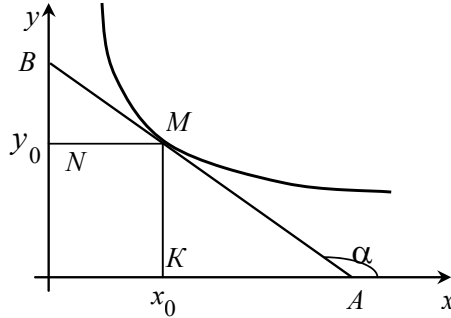


Рис. 3.6. $E_x(y) = \frac{BM}{MA}$

$MK = KA \cdot \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -KA \cdot \operatorname{tg} \alpha = -KA \cdot y'$. Так как треугольники BMN и MAK подобны, то $E_x(y) = \frac{x_0}{y_0} y' = \langle y_0 = MK \rangle = -\frac{x_0}{KA} \frac{y'}{y'} = \langle x_0 = NM \rangle = -\frac{NM}{KA} = -\frac{BM}{MA}$, т.е. эластичность *убывающей* функции равна отношению расстояний по касательной от точки $M(x_0; y_0)$ до точек ее пересечения с осями ординат и абсцисс, взятому со знаком минус.

Свойства эластичности функции

Пусть функция $y = f(x)$ имеет конечную или бесконечную производную на промежутке. Вспомним, что производная $y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}$ равна отношению дифференциалов dy и dx .

1. Эластичность — безразмерная величина, значение которой не зависит от того, в каких единицах измерены величины y и x :

$$\boxed{E_{ax}(by) = E_x(y)}.$$

Доказательство очевидно: $E_{ax}(by) = \frac{ax}{by} \frac{d(by)}{d(ax)} = \frac{x}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} y'$.

2. Эластичности взаимно обратных функций — взаимно обратные величины:

$$E_x(y) = \frac{1}{E_y(x)}. \quad (3.11)$$

Действительно, $E_x(y) = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} = \frac{1}{\frac{dx}{dy} \cdot \frac{y}{x}} = \frac{1}{E_y(x)}$.

3. Эластичность произведения двух функций $u(x)$ и $v(x)$, зависящих от одного и того же аргумента x , равна сумме эластичностей:

$$\boxed{E_x(uv) = E_x(u) + E_x(v)}.$$

Доказательство

$$E_x(uv) = \frac{d(uv)}{dx} \cdot \frac{x}{uv} = \frac{v \cdot \left(\frac{du}{dx}\right) + u \cdot \left(\frac{dv}{dx}\right)}{uv} \cdot x = \frac{du}{dx} \cdot \frac{x}{u} + \frac{dv}{dx} \cdot \frac{x}{v} = E_x(u) + E_x(v).$$

4. Эластичность частного двух функций $u(x)$ и $v(x)$, зависящих от одного и того же аргумента x , равна разности эластичностей:

$$E_x\left(\frac{u}{v}\right) = E_x(u) - E_x(v).$$

5. Эластичность суммы двух функций может быть найдена по формуле:

$$E_x(u+v) = \frac{uE_x(u) + vE_x(v)}{u+v}.$$

$$\begin{aligned} \text{Доказательство. } E_x(u+v) &= \frac{x}{u+v} \frac{d(u+v)}{dx} = \frac{x}{u+v} \frac{du}{dx} \frac{u}{u} + \frac{x}{u+v} \frac{dv}{dx} \frac{v}{v} = \\ &= \frac{u}{u+v} \frac{du}{dx} \frac{x}{u} + \frac{v}{u+v} \frac{dv}{dx} \frac{x}{v} = \frac{u}{u+v} E_x(u) + \frac{v}{u+v} E_x(v) = \frac{uE_x(u) + vE_x(v)}{u+v}. \end{aligned}$$

Эластичность элементарных функций

Вычислим эластичности некоторых элементарных функций.

1. Степенная функция $y = x^\alpha$, $x > 0$, $\alpha \in \mathbf{R}$. Ее эластичность

$$E_x(x^\alpha) = \frac{x}{y} \cdot y' = \frac{x}{x^\alpha} \cdot \alpha x^{\alpha-1} = \alpha.$$

2. Показательная функция $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$. Ее эластичность

$$E_x(a^x) = \frac{x}{y} \cdot y' = \frac{x}{a^x} \cdot a^x \ln a = x \ln a.$$

3. Логарифмическая функция $y = \ln x$. Ее эластичность

$$E_x(\ln x) = \frac{x}{y} \cdot y' = \frac{x}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{\ln x}.$$

4. Линейная функция $y = ax + b$. Ее эластичность

$$E_x(ax+b) = \frac{x}{ax+b} \cdot a = \frac{ax}{ax+b}.$$

Функция в зависимости от величины своей эластичности может быть:

<i>совершенно эластичная</i>	$ E_x(y) = +\infty$;
<i>эластичная</i>	$1 < E_x(y) < +\infty$;
<i>неэластичная</i>	$0 < E_x(y) < 1$;
<i>совершенно неэластичная</i>	$E_x(y) = 0$.

3.9. Производная функции, заданной параметрически

Пусть зависимость между аргументом x и функцией y задана при помощи уравнений

$$x = \phi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in [\alpha; \beta], \quad (3.12)$$

где t — вспомогательная переменная, называемая параметром.

Пусть для функции $x = \phi(t)$ существует обратная функция $t = \phi^{-1}(x)$. Тогда равенства (3.10) определяют сложную функцию $y = \psi(\phi^{-1}(x))$ аргумента x , заданную параметрически уравнениями (3.12). Найдем ее производную, используя теоремы о дифференцировании сложной и обратной функций:

$$y'_x = \psi'(\phi^{-1}(x))(\phi^{-1}(x))' = \left| (\phi^{-1}(x))' \right| = \frac{1}{\phi'(t)} = \psi'(t) \cdot \frac{1}{\phi'(t)}.$$

Здесь производная y'_x выражена через параметр t . Чтобы установить ее связь с переменной x , нужно использовать уравнение $x = \phi(t)$. Т.о., если функция задана параметрически, то и ее производная задана параметрически:

$$\text{функция: } \begin{cases} x = \phi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases} \Rightarrow \text{ее производная: } \begin{cases} x = \phi(t), \\ y'_x = \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}. \end{cases}$$

Если при этом функции $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ дважды дифференцируемы на $[\alpha; \beta]$, то существует производная второго порядка: $y'_x = \frac{(\ln^2 t)'}{(t^3)'} = \frac{2 \ln t \cdot (1/t)}{3t^2} = \frac{2 \ln t}{3t^3}$, выраженная через па-

раметр t . Но нет смысла запоминать последнюю формулу, так как указанный метод можно применять столько раз, сколько потребуется.

Пример 3.11. Найти y'_x, y''_{xx} для функции $y = y(x)$, заданной параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = t^3, \\ y = \ln^2 t. \end{cases}$

Решение. Первая производная $y'_x = \frac{(\ln^2 t)'}{(t^3)'} = \frac{2 \ln t \cdot (1/t)}{3t^2} = \frac{2 \ln t}{3t^3}$.

Вторая производная

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{\phi'(t)} = \frac{\left(\frac{2 \ln t}{3t^3} \right)'}{3t^2} = \frac{2}{9} \cdot \frac{(1/t) \cdot t^3 - 3t^2 \ln t}{t^8} = \frac{2}{9} \cdot \frac{1 - 3 \ln t}{t^6}.$$

3.10. Дифференцирование функций, заданных неявно

Пусть функция $y = y(x)$ задана в неявном виде, т. е. уравнением, не разрешенным относительно y ,

$$F(x; y) = 0.$$

Если функция $y = y(x)$ дифференцируема на X , то можно вычислить производную $y'(x)$, не зная в явном виде формулы, задающей $y(x)$. Для этого тождество $F(x; y) \equiv 0$ нужно продифференцировать по переменной x , считая при этом y функцией аргумента x . Получим равенство, которое вместе с соотношением $F(x; y) = 0$ неявно определяет производную $y'(x)$.

Пример 3.12. Найти производную функции $y = y(x)$, заданной уравнением $xe^y + ye^x = 1$. Вычислить значение $y'(1)$.

Решение. Дифференцируем уравнение по переменной x , считая при этом y функцией от x :

$$(xe^y + ye^x)'_x = 0.$$

Пользуемся правилами дифференцирования сложной функции и произведения функций: $(xe^y)'_x = 1 \cdot e^y + xe^y \cdot y'$, $(ye^x)'_x = y' \cdot e^x + e^y \cdot ye^x$. Тогда уравнение принимает вид: $1 \cdot e^y + \underline{xe^y \cdot y'} + \underline{y' \cdot e^x} + ye^x = 0 \Rightarrow y'(xe^y + e^x) = -(e^y + ye^x)$. Отсюда $y' = \frac{e^y + ye^x}{xe^y + e^x}$. Но y' зависит не только от x , но и от y . Чтобы

найти $y'(1)$, сначала нужно найти $y(1)$. Подставим $x = 1$ в исходное уравнение: $1 \cdot e^y + ye = 1 \Rightarrow e^y = 1 - ey$. Так как в левой части уравнения возрастающая функция, а в правой убывающая, то $y = 0$ является единственным корнем этого уравнения. Итак, $y'(1) = -\frac{e^0 + 0}{1 \cdot e^0 + e^1} = -\frac{1}{1 + e}$.

ГЛАВА 4. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

4.1. Дифференциал функции одной переменной

Пусть функция $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ определена на множестве $X \subset \mathbf{R}$ и дифференцируема в точке $x_0 \in X$ предельной для множества X .

Определение. Дифференциалом df или $df(x_0)$ функции f в точке x_0 называется линейная функция приращения Δx :

$$dy = df(x_0) := f'(x_0)\Delta x. \quad (4.1)$$

Формулу (4.1) приращения дифференцируемой функции можно записать в виде:

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \rightarrow 0.$$

Заметим, что из последней формулы вытекает, что

$$\Delta f(x_0) - df(x_0) = o(\Delta x), \quad \Delta x \rightarrow 0,$$

т.е. разность $\Delta y - dy$ имеет более высокий порядок малости по сравнению с Δx . Поэтому говорят, что дифференциал есть *главная часть* приращения функции f в точке x_0 .

Если $f(x) \equiv x$, то, очевидно, $f'(x) \equiv 1$ и $dx = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$, то есть $dx = \Delta x$.

Поэтому

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x = f'(x_0)dx$$

или

$$f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx},$$

то есть отношение дифференциалов $df(x_0)$ и dx равно $f'(x_0)$. По этой причине, следуя Лейбницу, производную часто обозначают символом $\frac{df(x)}{dx}$ наряду с предложенным

впоследствии Лагранжем символом $f'(x)$.

Геометрический смысл дифференциала

Посмотрим на дифференциал с геометрической точки зрения (рис. 4.1).

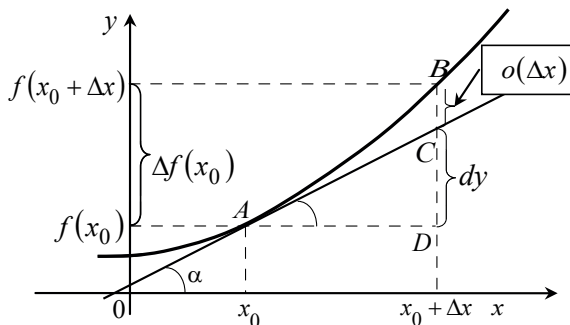


Рис. 4.1. Геометрический смысл дифференциала

На рисунке к графику функции $f(x)$ проведена касательная в точке A с абсциссой x_0 . Согласно (4.1)

$dy = d f(x_0) = f'(x_0) \Delta x = \operatorname{tg} \alpha \cdot \Delta x = CD$ — приращение ординаты касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 . При этом разность $BC = \Delta f(x_0) - df(x_0) = o(\Delta x)$ — бесконечно малая более высокого порядка, чем Δx .

Инвариантность формы дифференциала первого порядка

Пусть функция $z = g(y)$ дифференцируема в точке y . Тогда

$$dz = g'(y) dy \quad (4.2)$$

Рассмотрим два случая:

1) если y — независимая переменная, то $dy = \Delta y$, поэтому

$$dz = g'(y) dy;$$

2) если $y = f(x)$ дифференцируема в точке x , то сложная функция $z = g(y) = g(f(x))$ дифференцируема в точке x и

$$dz = z'(x) \Delta x = z'(x) dx = g'(y) \cdot \underline{f'(x) dx} = |f'(x) dx = dy| = g'(y) dy. \quad (4.3)$$

Таким образом, дифференциал функции равен произведению производной по некоторой переменной на дифференциал этой переменной.

Свойство первого дифференциала иметь одинаковые выражения через дифференциалы независимой переменной (в случае 1) и зависимой переменной (в случае 2) называют *инвариантностью формы первого дифференциала*.

Замечание. В (4.2) $dy = \Delta y$, здесь y — независимая переменная. В (4.3) $dy \neq \Delta y$, здесь y — зависимая переменная, $y = f(x)$.

Так, $d(e^x) = e^x dx = e^x \Delta x$, $d(e^{\sin x}) = e^{\sin x} d(\sin x) = e^{\sin x} \cos x dx$.

Дифференциал и приближенные вычисления

Если $f'(x_0) \neq 0$, то $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{df(x_0)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{f'(x_0) \Delta x} = \frac{f'(x_0)}{f'(x_0)} = 1$,

то есть

$$\Delta f(x_0) \approx df(x_0), \Delta x \rightarrow 0. \quad (4.4)$$

Этим равенством часто пользуются для приближенного вычисления значений дифференцируемой функции из некоторой ε — окрестности точки $x_0 \in X$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$. Формулу (4.4) записывают в виде

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x, \Delta x \rightarrow 0. \quad (4.5)$$

Так как $\Delta x = x - x_0$, то $x = x_0 + \Delta x$ и формула (4.5) принимает вид

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), x \rightarrow x_0. \quad (4.6)$$

Графиком функции в правой части (4.6) является прямая $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, проходящая через точку $(x_0; f(x_0))$ и имеющая угловой коэффициент $f'(x_0)$. Эта прямая — касательная к графику функции в точке $(x_0; f(x_0))$ — доставляет линейное приближение функции f в окрестности точки x_0 . Следовательно, геометрически (4.6) означает, что в окрестности точки $(x_0; f(x_0))$ график функции $y = f(x)$ сливается с отрезком касательной, т. е. «спрямляется». Говорят, что соотношением (4.4) функция $y = f(x)$ *линеаризована* в окрестности точки x_0 .

Если аргумент x вычислен с относительной погрешностью $\delta_x = \frac{\Delta x}{x}$, то значение функции $f(x)$ — с относительной погрешностью $\delta_y = \frac{\Delta y}{y}$, определяется по формуле

$$\delta_y = \left| \frac{\Delta y}{y} \right| \approx \left| \frac{dy}{y} \right| = \left| \frac{f'(x)\Delta x}{f(x)} \right| = \left| \frac{xf'(x)}{f(x)} \right| \cdot \left| \frac{\Delta x}{x} \right|$$

или

$$\delta_y = |E_x(y)| \delta_x, \quad (4.7)$$

где $E_x(y) := \frac{x f'(x)}{f(x)}$ — эластичность функции $y = f(x)$ в точке x .

Пример 4.1. Найти время удвоения вклада в банк, если ставка банковского процента за год составляет 10 % годовых.

Найдем количество лет T , в течение которых сумма вклада увеличится в 2 раза. За год вклад увеличивается в $\left(1 + \frac{10}{100}\right) = 1,1$ раз, поэтому за T лет вклад увеличится в $(1,1)^T$

раз. Т. о., необходимо решить уравнение $(1,1)^T = 2$. Логарифмируя, получаем $T \ln 1,1 = \ln 2$, откуда $T = \frac{\ln 2}{\ln 1,1}$. Для прибли-

женного вычисления $\ln 1,1$ используем понятие дифференциала. Полагая $f(x) = \ln x$, найдем $f'(x) = \frac{1}{x}$ и в соответствии с (4.5) $\ln(x + \Delta x) \approx \ln x + \frac{\Delta x}{x}$. В данном примере при $x = 1$ и

$\Delta x = 0,1$ получим $\ln 1,1 \approx 0,1$. Так как $\ln 2 \approx 0,7$, то время удвоения вклада $T \approx 7$ (лет).

Пример 4.2. С какой относительной погрешностью надо измерить радиус шара, чтобы объем его можно было определить с точностью до 1 %?

Решение. $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Значит, $\frac{dV}{V} = 3\frac{dr}{r}$. Нужно, чтобы $\frac{dV}{V} \leq 0,01$, значит, $\frac{dr}{r} \leq \left(\frac{1}{3}\right) \cdot 0,01$. *Ответ:* с точностью 1/3 %.

Пример 4.3. На сколько процентов увеличится $y = x^{0,75}$, если x увеличится на 2 %?

Решение. Найдем эластичность функции

$E_x(y) = \frac{x \cdot 0,75x^{-0,25}}{x^{0,75}} = 0,75$ и по формуле (4.7) относительная погрешность $\delta_y = 0,75 \cdot 2 = 1,5\%$.

Упражнения

1. Вычислить приближенно:

а) $10^{1/3}$; б) $\ln 1,04$; в) $e^{0,015}$; г) $\sin(\pi + 0,01)$.

2. На сколько процентов увеличится площадь круга, если его радиус увеличится на 1 %?

3. Известно, что $x \approx 0,5$ и $x^3 - x \approx 0$. С какой точностью выполняется приближенное равенство $x \approx 0,5$, если $x^3 - x \approx 0$ выполняется с точностью 0,001?

4. На сколько процентов изменится величина степени $2,1^{3,2}$ при изменении основания степени на 3 %?

4.2. Производные и дифференциалы высших порядков

Пусть для функции $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ множество $X \subset \mathbf{R}$ не имеет изолированных точек и пусть для любого $x \in X$ существует производная $f'(x)$. Функция $x \rightarrow f'(x)$ называется *первой производной* функции f и обозначается f' . Индукцией определим производную функции f произвольного порядка. Если функция $f^{(n-1)}$ ($n \in \mathbf{N}$) дифференцируема на множестве X , то ее производная $\left(f^{(n-1)}\right)'$ называется *n -й производной функции f* на множестве X и обозначается через $f^{(n)}$. Таким образом,

$$f^{(n)} := \left(f^{(n-1)}\right)', \quad f^{(0)} := f.$$

При этом функция f называется *n -дифференцируемой* (*n раз дифференцируемой*) на X .

Дифференциалы высших порядков (как и старшие производные) определяются индуктивно.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в каждой точке $x \in X$. Если в точке x дифференциал

$$d(f(x)) = f'(x)dx = f'(x)\Delta x$$

является дифференцируемой функцией, то существует дифференциал от дифференциала $d(dy) = d(df)(x_0)$ данной функции, который называется *вторым дифференциалом*, или *дифференциалом второго порядка* функции $y = f(x)$, и обозначается d^2y или $d^2f(x_0)$. Пусть определен дифференциал порядка $n - 1$: $d^{n-1}y = (d^{n-1}f)(x_0)$ ($n \in \mathbb{N}$). По определению полагают $d^0y := y = f(x)$. Тогда n -м *дифференциалом*, если он существует, называют функцию $d^n y = d(d^{n-1}y)$:

$$d^n f(x_0) = d(d^{n-1}f)(x_0), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Найдем формулы, выражающие дифференциалы высших порядков. Рассмотрим два случая.

1. Если x — *независимая* переменная, то $dx = \Delta x$ есть некоторое фиксированное приращение независимой переменной x , т. е. является постоянной величиной и $d(dx) = d(\Delta x) = 0$. Поэтому

$$d^2y := d(f'(x)dx)(x_0) = d(f')(x_0)dx = f''(x_0)(dx)^2 = f''(x_0)dx^2.$$

Здесь $dx^2 := (dx)^2$. Аналогично

$$d^n y = (d^n f)(x_0) = f^{(n)}(x_0)dx^n, \quad (4.8)$$

здесь $dx^n := (dx)^n$. Из (4.8) вытекает

$$f^{(n)}(x_0) = \frac{d^n f(x_0)}{dx^n} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

т. е. производная n -го порядка, как и производная первого порядка, может быть представлена как обыкновенная дробь — отношение дифференциалов n -го порядка функции f и n -й степени дифференциала аргумента.

2. Рассмотрим случай *зависимой* переменной. Пусть $y = f(x)$, где $x = x(t)$ — дифференцируемая функция. В силу инвариантности формы первого дифференциала $dy = f'(x)dx$. Здесь дифференциал $dx = x'(t)dt$ в общем случае не является постоянной величиной ($dx \neq \Delta x$). Поэтому

$$\begin{aligned} d^2 y &:= d(dy) = d(df(x)) = d(f'(x)dx) = \langle d(uv) = u dv + v du \rangle = \\ &= f''(x)dx^2 + f'(x)d(dx) = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2 x. \end{aligned}$$

Сравнивая эту формулу с формулой $d^2 y = f''(x)dx^2$, где x — независимая переменная, делаем вывод, что уже *второй дифференциал инвариантностью формы не обладает*.

Упражнение. Пусть $x = x(t) = kt + b$, $k, b \in \mathbf{R}$. Показать, что для случая линейной внутренней функции свойство инвариантности дифференциалов высших порядков сохраняется.

Правила вычисления производной суммы n -го порядка. Формула Лейбница для n -й производной произведения двух функций

Теорема 4.1. Если функции $u(x), v(x)$ имеют в точке x_0 производные порядка n , то в этой точке существуют производные порядка n суммы и произведения этих функций и выполняются равенства:

$$(u \pm v)^{(n)}(x_0) = u^{(n)}(x_0) \pm v^{(n)}(x_0), \quad (4.9)$$

$$(u \cdot v)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(k)}(x_0) v^{(n-k)}(x_0), \quad n=1, 2, \dots, \quad (4.10)$$

где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \dots k}$, $0 \leq k \leq n$, $0! := 1$,

$$u^{(0)}(x) := u(x), \quad v^{(0)}(x) := v(x).$$

Эти формулы нетрудно проверить методом математической индукции.

Равенство (4.10) называют формулой Лейбница для n -й производной произведения двух функций.

Пример 4.4. Для функции $y(x) = (x^3 + 5x + 6)e^{4x}$ в точке $x = 0$ найти производную 10-го порядка.

Решение. Заданная функция представляет собой произведение двух дифференцируемых функций. В этом случае для нахождения n -й производной нужно применить формулу Лейбница (4.10).

Для заданной функции в случае $n = 10$ формула Лейбница принимает вид

$$y^{(10)}(x) = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k (e^{4x})^{(10-k)} (x^3 - 5x + 6)^{(k)} = C_{10}^0 (e^{4x})^{(10)} (x^3 - 5x + 6)^{(0)} + \\ + C_{10}^1 (e^{4x})^{(9)} (x^3 - 5x + 6)' + C_{10}^2 (e^{4x})^{(8)} (x^3 - 5x + 6)'' + C_{10}^3 (e^{4x})^{(7)} (x^3 - 5x + 6)^{(3)}.$$

Так как $(x^3 - 5x + 6)^{(4)} = \dots = (x^3 - 5x + 6)^{(10)} = 0$, то все остальные слагаемые в сумме равны нулю. Находим производные:

$$(e^{4x})^{(10)} = e^{4x} \cdot 4^{10}, (e^{4x})^{(9)} = e^{4x} \cdot 4^9, (e^{4x})^{(8)} = e^{4x} \cdot 4^8, (e^{4x})^{(7)} = e^{4x} \cdot 4^7,$$

$$(x^3 - 5x + 6)^{(1)} = 3x^2 - 5, (x^3 - 5x + 6)^{(2)} = 6x, (x^3 - 5x + 6)^{(3)} = 6.$$

При $x = 0$ соответственно получаем

$$(x^3 - 5x + 6)^{(0)} \Big|_{x=0} = 6, (x^3 - 5x + 6)' \Big|_{x=0} = -5, (x^3 - 5x + 6)'' \Big|_{x=0} = 0, \\ (e^{4x})^{(10)} \Big|_{x=0} = 4^{10}, (e^{4x})^{(9)} \Big|_{x=0} = 4^9, (e^{4x})^{(8)} \Big|_{x=0} = 4^8, (e^{4x})^{(7)} \Big|_{x=0} = 4^7.$$

Т. о.,

$$y^{(10)}(0) = 1 \cdot 4^{10} \cdot 6 + 10 \cdot 4^9 \cdot (-5) + \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} \cdot 4^8 \cdot 0 + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 4^7 \cdot 6 = 4980736.$$

4.3. Теоремы о непрерывных и дифференцируемых функциях

Пусть функция $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ определена на множестве $X \subset \mathbf{R}$ и $x_0 \in X$ — предельная точка множества X .

Определение. Функция f называется *строго возрастающей* (строго убывающей) в точке x_0 (рис. 4.2), если существует такая окрестность $O_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ этой точки, что

$$f(x) < f(x_0) \quad (f(x) > f(x_0)) \quad \forall x \in (x_0 - \varepsilon; x_0),$$

$$f(x) > f(x_0) \quad (f(x) < f(x_0)) \quad \forall x \in (x_0; x_0 + \varepsilon).$$

Если в этих неравенствах знаки $>$ и $<$ заменить соответственно на \geq и \leq , то говорят, что функция f *возрастает* (не убывает) (убывает (не возрастает)) в точке x_0 .

Теорема 4.2 (о достаточных условиях возрастания (убывания) функции в точке)

Пусть функция $f: [a; b] \rightarrow \mathbf{R}$, $x_0 \in (a; b)$. Пусть функция f имеет в точке x_0 производную $f'(x_0)$. Тогда в точке x_0 функция f строго возрастает, если $f'(x_0) > 0$, и строго убывает, если $f'(x_0) < 0$.

Доказательство. Пусть $f'(x_0) > 0$.

Так как $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, то существует

$O_\varepsilon(x_0) \subseteq (a; b): \forall x \in O_\varepsilon(x_0)$, справедливо неравенство $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$. Значит, если $x - x_0 > 0$, то $f(x) - f(x_0) > 0$,

т.е. $f(x) > f(x_0)$. Если $x - x_0 < 0$, то $f(x) < f(x_0)$. Это и означает, что f строго возрастает в точке x_0 (рис. 4.2).

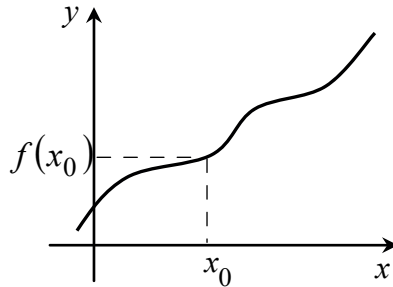


Рис 4.2. График возрастающей в точке функции

В случае $f'(x_0) < 0$ аналогично доказывается, что функция f строго убывает в точке x_0 .

Определение. Точка $x_0 \in X$ называется:

- 1) *точкой локального максимума (локального минимума)*;
- 2) *точкой строгого локального максимума (строгого локального минимума)*, если существует такая окрестность $O_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ этой точки, что, соответственно,

- 1) $\forall x \in O_\varepsilon(x_0) \ f(x) \leq f(x_0) \ (f(x) \geq f(x_0))$;
- 2) $\forall x \in O_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\} \ f(x) < f(x_0) \ (f(x) > f(x_0))$.

Точки локального максимума и минимума называют *точками локального экстремума*.

Теорема 4.3 (теорема Ферма¹ о равенстве нулю производной (необходимое условие экстремума))

Пусть $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ определена на множестве $X \subset \mathbb{R}$ и $x_0 \in X$ — внутренняя точка множества X . Если x_0 точка локального экстремума и существует $f'(x_0)$, то $f'(x_0) = 0$.

¹ Пьер Ферма (1601–1665) — выдающийся французский математик, по профессии юрист. Ферма является одним из создателей теории чисел. Сформулированная им теорема о том, что уравнение $x^n + y^n = z^n$, $n \geq 3$ не имеет решений в целых ненулевых числах, была доказана только в 1994 г. английским математиком Эндрю Уайлсом.

Доказательство. Если $f'(x_0) > 0$, то функция $f(x)$ строго возрастает в точке x_0 , а если $f'(x_0) < 0$, то функция $f(x)$ строго убывает в точке x_0 . Значит, локальный экстремум возможен только при условии $f'(x_0) = 0$.

Замечание. Условие $f'(x_0) = 0$, будучи необходимым для локального экстремума, не является достаточным. Действительно, функция $f(x) = x^3$ строго возрастает на всей числовой оси. Вместе с тем, ее производная $f'(x) = 3x^2$ обращается в ноль при значении $x = 0$.

С другой стороны, локальный экстремум может достигаться в точках, где функция недифференцируема или даже разрывна. На рисунке 4.3 x_1, x_2 — точки локальных экстремумов.

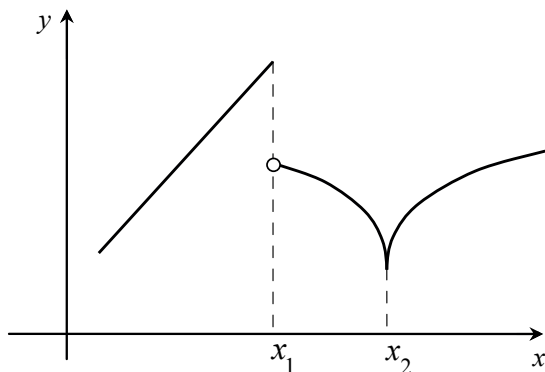


Рис. 4.3. x_1, x_2 — точки локальных экстремумов

Точки, в которых выполняется необходимое условие экстремума для *непрерывной* функции, называются *критическими точками первого рода* этой функции. Ими являются корни уравнения $f'(x) = 0$ (*стационарные точки* функции f) или точки, в которых производная функции f не существует.

Иногда критические точки называют точками, «подозрительными на экстремум».

Замечание. Не в каждой своей критической точке функция обязательно имеет экстремум.

Так, для рассмотренной выше функции $f(x) = x^3$ критической является точка $x=0$, что следует из уравнения $f'(x) = 3x^2 = 0$. Однако эта функция строго возрастает и экстремумов не имеет.

4.4. Формулы конечных приращений, их приложения

Пусть функция $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ определена на множестве $X \subset \mathbf{R}$ и $x_0 \in X$ — предельная точка X .

Теорема Ролля¹ о среднем

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема на $(a; b)$ (т.е. во всех внутренних точках). Если $f(a) = f(b)$, то существует такая точка $\xi \in (a; b)$, что $f'(\xi) = 0$.

Доказательство. Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то, по второй теореме Вейерштрасса, в некоторых точках отрезка она достигает своих максимального M и минимального m значений на этом отрезке. Если $M = m$, то $f(x) \equiv M = m \ \forall x \in (a; b)$ и $f'(x) = 0 \ \forall x \in (a; b)$.

Пусть $M \neq m$. Так как $f(a) = f(b)$, то по крайней мере одно из значений (M или m) достигается во внутренней точке отрезка $[a; b]$. Тогда по теореме Ферма в этой точке производная f' равна нулю. Теорема доказана.

Геометрически теорема Ролля показывает, что в некоторых точках интервала $(a; b)$ (на рис. 4.4 точки ξ_1, ξ_2) касательная к графику функции параллельна оси Ox .

¹ Мишель Роль (1652–1719) — французский математик. Его исследования были не замечены и забыты современниками, а по достоинству оценены намного позже.

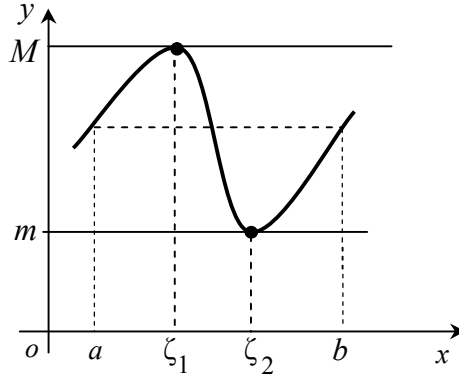


Рис. 4.4. Геометрическая иллюстрация теоремы Ролля

Следствие. Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля и $f(a) = f(b) = 0$, то найдется точка $\xi \in (a; b)$, в которой $f'(\xi) = 0$. Иначе между двумя нулями функции найдется хотя бы один нуль производной.

Теорема Лагранжа о среднем

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема во всех точках интервала $(a; b)$. Тогда существует точка $\xi \in (a; b)$, такая что $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ или

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a). \quad (4.11)$$

Формулу (4.11) называют *формулой Лагранжа*, или *формулой конечных приращений*.

Доказательство. Сведем задачу к теореме Ролля. Выберем число λ так, чтобы для функции $\phi(x) := f(x) - \lambda x$ выполнялось равенство $\phi(a) = \phi(b)$. Имеем $\phi(a) = f(a) - \lambda a$, $\phi(b) = f(b) - \lambda b$. Из уравнения $f(a) - \lambda a = f(b) - \lambda b$ вытекает, что $\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Таким образом, $\phi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot x$,

причем $\phi(a) = \phi(b)$. Функция $\phi(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема в интервале $(a; b)$. По теореме Ролля существует точка $\xi \in (a; b)$, такая что $\phi'(\xi) = 0$. Это означает, что $f'(\xi) = \lambda$, т.е. $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Теорема доказана.

Следствие о постоянстве функции, имеющей равную нулю производную. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a; b)$. Тогда $f(x) \equiv C \quad \forall x \in [a; b]$.

Доказательство. Пусть $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a; b)$. Рассмотрим две произвольные точки $x_0, x \in (a; b)$, и пусть, например, $x > x_0$. Тогда $[x_0; x] \in (a; b)$. По теореме Лагранжа $f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)$, где ξ — некоторая точка из интервала $(a; b)$. Так как $f'(\xi) = 0$, то $f(x) - f(x_0) = 0 \quad \forall x < x_0$. Поэтому $f(x) = f(x_0) = \text{const}, x \in [a; b]$.

Геометрический смысл теоремы Лагранжа (рис. 4.5)

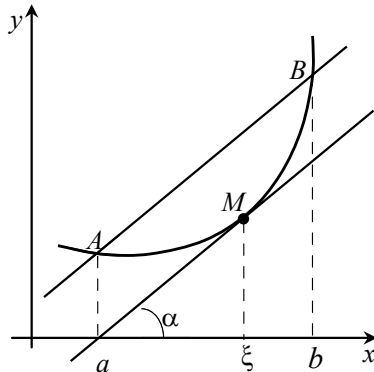


Рис. 4.5. Геометрическая иллюстрация теоремы Лагранжа

$f'(\xi) = \text{tg } \alpha$ есть тангенс угла наклона касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $\xi \in (a; b)$, отношение

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ — тангенс угла наклона прямой, соединяю-

щей точки $A(a; f(a))$ и $B(b; f(b))$ графика функции. Таким образом, теорема утверждает, что на кривой $y = f(x)$ существует точка $M(\xi; f(\xi))$, такая что через эту точку можно провести касательную параллельно хорде AB .

Теорема Коши¹ о среднем

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$ и дифференцируемы в интервале $(a; b)$ и пусть производная $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a; b)$. Тогда найдется точка $\xi \in (a; b)$, такая что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \quad (4.12)$$

Доказательство. Сведем задачу к теореме Ролля. Введем функцию $\phi(x) := f(x) - \lambda g(x)$ и подберем число λ так, чтобы выполнялось равенство $\phi(a) = \phi(b)$. Имеем $\phi(a) = f(a) - \lambda g(a)$, $\phi(b) = f(b) - \lambda g(b)$. Из уравнения $f(a) - \lambda g(a) = f(b) - \lambda g(b)$ находим

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \quad (4.13)$$

Заметим, что $g(b) \neq g(a)$, так как в противном случае $\exists \eta \in (a; b): g'(\eta) = 0$, что противоречит условию $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a; b)$. Функция $\phi(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема $\forall x \in (a; b)$, причем $\phi(a) = \phi(b)$. По теореме Ролля существует точка $\xi \in (a; b)$, такая что $\phi'(\xi) = 0$. Находим

¹ Коши Огюстен Луи (1789–1857) — французский математик, один из наиболее активных творцов современного языка и аппарата классического анализа.

$$\phi'(\xi) \equiv f'(\xi) - \lambda g'(\xi) = 0. \quad (4.14)$$

Из (4.14) в силу того, что $g'(\xi) \neq 0$, находим $\lambda = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

С учетом (4.13) получим (4.12). Теорема доказана.

Замечание. Теорема Лагранжа — частный случай теоремы Коши при $g(x) = x$, а теорема Ролля — частный случай теоремы Лагранжа. Во всех этих теоремах речь идет о существовании некоторого числа $\xi \in (a; b)$, точное значение которого остается неизвестным. Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши обычно называют *теоремами о среднем значении*.

Сформулированные и доказанные теоремы легли в основу доказательства мощного метода раскрытия неопределенностей, который нашел швейцарский математик Иоганн Бернулли¹, но опубликовал французский математик Гийом Лопиталь².

4.5. Раскрытие неопределенностей (Правило Лопиталья)

Теорема о нахождении предела отношения функций через предел отношения производных

Пусть:

1) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в некоторой проколотой окрестности точки x_0 ;

¹ Иоганн Бернулли (1667–1748) — швейцарский математик, младший брат Якоба Бернулли. Сотрудничал с Лейбницем в разработке дифференциального и интегрального исчисления. Продвинул теорию дифференциальных уравнений, исследования в области механики и др.

² Лопиталь Гийом Франсуа Антуан (1661–1704) — французский математик, автор первого учебника по дифференциальному исчислению (1696), в основу которого легли лекции швейцарского математика Иоганна Бернулли.

2) $g(x) \neq 0$ и $g'(x) \neq 0$ в этой окрестности;

3) существует $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ (конечный или бесконеч-

ный);

4) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ или $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$.

Тогда существует $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, причем

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Замечание. Правило Лопиталья можно рассматривать и в случае $x_0 = \infty, x_0 = +\infty, x_0 = -\infty$. В этом случае достаточно сделать замену $x = \frac{1}{t}$ и воспользоваться результатом теоремы.

Доказательство. Рассмотрим случай $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$. Доопределим функции $f(x)$ и $g(x)$ в точке x_0 : $f(x_0) = 0$ и $g(x_0) = 0$. Так как теперь $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$, то функции $f(x)$ и $g(x)$ будут непрерывны в точке x_0 . Поэтому на отрезке $[x_0; x]$, где x — любая точка окрестности точки x_0 , функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны, дифференцируемы и $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (x_0; x)$.

Поэтому применима теорема Коши:
 $\exists \xi \in (x_0; x): \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$

Если $x \rightarrow x_0$, то $\xi \rightarrow x_0$, и поэтому
 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi \rightarrow x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$

Случай $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$ оставляем без доказательства.

Замечания

1. При применении правила Лопиталья дифференцируется числитель и знаменатель дроби *отдельно*.

2. Правило Лопиталья применяется *только к дробям*.

Чтобы применить правило Лопиталья для неопределенностей вида $[\infty - \infty]$, $[0 \cdot \infty]$, $[1^\infty]$, $[0^0]$ и т.д., нужно предварительно исследуемое выражение преобразовать к дроби. Рассмотрим примеры раскрытия некоторых неопределенностей.

Неопределенность $[0 \cdot \infty]$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = [0 \cdot \infty] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \left[\frac{0}{0} \right].$$

Неопределенность $[\infty - \infty]$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \left(1 - \frac{g(x)}{f(x)} \right) = \begin{cases} (\infty \cdot 0), \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 1, \\ \infty, \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} \neq 1. \end{cases}$$

Неопределенности $[1^\infty]$, $[0^0]$, $[\infty^0]$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} (e^{\ln f(x)})^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{g(x) \cdot \ln f(x)}.$$

Пример 4.5. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln \cos 5x}{\sin^2 4x} \right)$.

Решение.
$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln \cos 5x}{\sin^2 4x} \right) = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\frac{\cos 5x}{2 \sin 4x \cos 4x \cdot 4}} \cdot (-\sin 5x) \cdot 5 \right) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \langle \cos 5x \rightarrow 1, x \rightarrow 0; \cos 4x \rightarrow 1, x \rightarrow 0 \rangle = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(-\sin 5x) \cdot 5}{8 \sin 4x} \right) = \left[\frac{0}{0} \right] = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(-\cos 5x) \cdot 25}{8 \cos 4x \cdot 4} \right) = -\frac{25}{32}.
 \end{aligned}$$

Пример 4.6. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow +0} (x \cdot \ln x)$.

Решение

$$\lim_{x \rightarrow +0} (x \cdot \ln x) = [0 \cdot \infty] = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{1/x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1/x}{(-1/x^2)} = -\lim_{x \rightarrow +0} x = 0.$$

Пример 4.7. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow +0} x^x$.

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^x = [0^0] = \lim_{x \rightarrow +0} (e^{\ln x})^x = \lim_{x \rightarrow +0} e^{x \cdot \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow +0} (x \cdot \ln x)} = e^0 = 1.$$

Пример 4.8. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{1/x} - 1)$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{1/x} - 1) = [\infty \cdot 0] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{1/x} - 1}{1/x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{1/x} (-1/x^2)}{(-1/x^2)} = \left\langle \frac{1}{x} \rightarrow 0, e^{1/x} \rightarrow 1 \right\rangle = 1.$$

Пример 4.9. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 5} (2x - 9)^{\frac{2x}{x^2 - 25}}$.

$$\lim_{x \rightarrow 5} (2x - 9)^{\frac{2x}{x^2 - 25}} = (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow 5} \left(e^{\ln(2x-9)} \right)^{\frac{2x}{x^2 - 25}} = e^{\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x \ln(2x-9)}{x^2 - 25}} = \left[\frac{0}{0} \right] =$$

$$= \langle 2x \rightarrow 10, x \rightarrow 5 \rangle = e^{10 \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\ln(2x-9)}{x^2 - 25}} = e^{10 \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2}{2x(2x-9)}} = e^2.$$

3. Иногда правило Лопиталя применяется несколько раз, если от неопределенности не удастся избавиться на первом шаге. Однако условия теоремы должны оставаться справедливыми.

Пример 4.10. Вычислить $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x}, n \in \mathbb{N}$.

Решение. Значение предела $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n \cdot x^{n-1}}{e^x} = \left[\frac{0}{0} \right] =$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n!}{e^x} = 0$ позволяет сравнить бесконеч-

но большие при $x \rightarrow +\infty$ функции: показательная функция e^x — бесконечно большая функция большего порядка по сравнению со степенной функцией x^n — бесконечно большой при $x \rightarrow +\infty$.

4. Правило Лопиталя *не является универсальным*, оно применимо лишь тогда, когда *существует предел* отношения производных $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\phi'(x)}$.

Пример 4.11. Значение предела $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \cos x}{x + \cos x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right)$ полу-
 чить по правилу Лопиталя **нельзя**, поскольку
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x - \cos x)'}{(x + \cos x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$ — не существует ($\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$ не су-

ществует, см. решение примера 3.7). Однако исходный предел **существует**, его легко можно вычислить другим способом,

например так: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \cos x}{x + \cos x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x} \cos x}{1 + \frac{1}{x} \cos x} = \frac{1}{1} = 1$, применяя

теорему о пределе произведения бесконечно малой функции на ограниченную, в нашем случае $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, $\forall x$ имеет место неравенство $|\cos x| \leq 1$.

4.6. Формула Тейлора для многочленов

В 1715 году Брук Тейлор¹ опубликовал формулу для разложения функции в степенной ряд, которая явилась мощным инструментом для исследования функций и приближенных вычислений.

Рассмотрим *вспомогательную* задачу. Пусть функция $y = f(x)$ имеет в окрестности точки x_0 производные до n -го порядка включительно. Требуется найти многочлен

$$T_n(x) = T_n(x, f, x_0)$$

степени не выше n , такой что для всех $s = 0, 1, 2, \dots, n$ выполняются равенства

$$f^{(s)}(x_0) = T_n^{(s)}(x_0). \quad (4.15)$$

Будем искать $T_n(x)$ в виде многочлена по степеням разности $(x - x_0)$:

$$T_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^n a_k(x - x_0)^k, \quad (4.16)$$

где коэффициенты a_k нужно определить.

Найдем производные многочлена $T_n(x)$ порядка s , $s = 0, 1, 2, \dots, n$:

$$\begin{aligned} T_n'(x) &= a_1 + 2 \cdot a_2(x - x_0) + 3 \cdot a_3(x - x_0)^2 + \dots + n \cdot a_n(x - x_0)^{n-1} = \\ &= \sum_{k=1}^n k a_k(x - x_0)^{k-1}, \end{aligned}$$

$$T_n''(x) = 1 \cdot 2 \cdot a_2 + 2 \cdot 3 \cdot a_3(x - x_0) + \dots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2} = \quad (4.17)$$

¹ Брук Тейлор (1685–1731) — английский математик. Ему принадлежат заслуги в разработке теории конечных разностей, автор работ о полете снарядов, взаимодействии магнитов, капиллярности и др.

$$= \sum_{k=2}^n k(k-1)a_k(x-x_0)^{k-2},$$

и далее

$$T_n^{(s)}(x) = \sum_{k=s}^n k(k-1)\dots(k-s+1)a_k(x-x_0)^{k-s}.$$

Из (4.16) и (4.17) при $x = x_0$ получаем

$$T_n(x_0) = a_0, \quad T_n'(x_0) = a_1, \quad T_n''(x_0) = 1 \cdot 2 \cdot a_2, \quad T_n'''(x_0) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a_3, \dots, \\ T_n^{(n)}(x_0) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \cdot a_n.$$

Отсюда

$$a_s = \frac{T_n^{(s)}(x_0)}{n!}, \quad s = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Значит, с учетом (4.15) должны выполняться равенства

$$a_s = \frac{T_n^{(s)}(x_0)}{n!} = \frac{f^{(s)}(x_0)}{n!}, \quad s = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Таким образом, поставленную задачу решает многочлен

$$T_n(x) = T_n(x, f, x_0) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k. \quad (4.18)$$

Многочлен $T_n(x)$, заданный формулой (4.18), называют *многочленом Тейлора порядка n функции f в точке x_0* . Он единственен.

4.7. Задача наилучшего локального приближения.

Формула Тейлора с остаточным членом
в форме Пеано¹

Покажем, что именно многочлен Тейлора $T_n(x)$ функции $f(x)$ задает *наилучшее локальное приближение* этой функции. Для этого оценим погрешность приближения $f(x) \approx T_n(x)$, т. е. оценим в некоторой окрестности точки x_0 функцию $R_n(x) = R_n(x, f, x_0) := f(x) - T_n(x, f, x_0)$. Разность $R_n(x)$ называют *остаточным членом формулы Тейлора*.

Покажем, что

$$R_n(x) = o\left((x - x_0)^n\right).$$

В самом деле, рассмотрим

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^n} = \left[\frac{0}{0} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - T'_n(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} = \left[\frac{0}{0} \right] = \dots = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n)}(x) - T_n^{(n)}(x_0)}{n!} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_0)}{n!} = 0, \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{(приме-} \\ \text{ним последовательно } n \text{ раз правило Лопиталя)} \end{array}$$

это означает, что

$$R_n(x) \equiv f(x) - T_n(x) = o\left((x - x_0)^n\right),$$

т. е.

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o\left((x - x_0)^n\right). \quad (4.19)$$

¹ Джузеппе Пеано (1858–1932) — итальянский математик. Занимался формально логическим обоснованием математики. Известен его пример непрерывной (жордановой) кривой, целиком заполняющей некоторый квадрат.

Полученная формула носит название *формулы Тейлора порядка n функции f в точке x_0 с остаточным членом в форме Пеано*. Ее называют *асимптотическим разложением n -го порядка функции $f(x)$ в окрестности точки x_0* . Формула (4.19) является *качественной* характеристикой погрешности.

В курсе математического анализа доказывается, что можно найти и другие погрешности приближения $f(x) \approx T_n(x)$.

4.8. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

Пусть функция $y = f(x)$ n раз непрерывно дифференцируема на $(a; b)$ (т.е. $\forall x \in (a; b) \exists f^{(n)}(x)$ и эта функция непрерывна $\forall x \in (a; b)$) и имеет в каждой точке этого интервала, за исключением, быть может, точки x_0 , производную $(n+1)$ -го порядка. Тогда для любого $x \in (a; b)$ между x_0 и x найдется такая точка ξ , что справедлива формула Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_{n+1}(x), \quad (4.20)$$

где $R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ — *остаточный член в форме Лагранжа*.

Так как точка $\xi \in (x_0; x)$, то $\xi = x_0 + \theta(x-x_0)$, где $0 < \theta < 1$.

Формула (4.20) является *количественной* характеристикой погрешности.

Формула Маклорена¹

Формулой Маклорена называется формула Тейлора при $x_0 = 0$:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x),$$

¹ Колин Маклорен (1698–1746) — шотландский математик. Математические исследования относятся к анализу (теория рядов, конечные разности), ряд работ к геометрии, механике и астрономии.

где

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{n+1}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Пример 4.12. Разложить функцию $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$ по степеням $(x-2)$.

Решение. $f'(x) = 3x^2 - 4x + 3$, $f''(x) = 6x - 4$, $f'''(x) = 6$,

$f^{(4)}(x) = 0$. Отсюда

$$f(2) = 11; \quad f'(2) = 7; \quad f''(2) = 8; \quad f'''(2) = 6; \quad f^{(4)}(2) = 0.$$

Следовательно, по формуле Тейлора третьего порядка

$$x^3 - 2x^2 + 3x + 5 = 11 + 7(x-2) + \frac{8}{2!}(x-2)^2 + \frac{6}{3!}(x-2)^3.$$

Остаточный член $R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-2)^4 \equiv 0$. Таким образом,

$$x^3 - 2x^2 + 3x + 5 = 11 + 7(x-2) + 4(x-2)^2 + (x-2)^3.$$

Пример 4.13. Разложить функцию $f(x) = \ln(1+x)$ по формуле Тейлора в окрестности точки $x_0 = 2$.

$$\text{Имеем } f(2) = \ln 3, \quad f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f'(2) = \frac{1}{3},$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f''(2) = -\frac{1}{3^2},$$

$$f'''(x) = \frac{1 \cdot 2}{(1+x)^3}, \quad f'''(2) = \frac{1 \cdot 2}{3^3}, \dots,$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(1+x)^n}, \quad f^{(n)}(2) = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{3^n},$$

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}, \quad f^{(n+1)}(\xi) = \frac{(-1)^n n!}{(1+\xi)^{n+1}}, \quad \text{где } 2 < \xi < x.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln 3 + \frac{1}{1! \cdot 3}(x-2) - \frac{1}{2! \cdot 3^2}(x-2)^2 + \frac{1 \cdot 2}{3! \cdot 3^3}(x-2)^3 + \dots + \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{n! 3^n} (x-2)^n + \\ &+ R_{n+1}(x) = \ln 3 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} (x-2)^k}{k \cdot 3^k} + R_{n+1}(x), \end{aligned}$$

где

$$R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+\xi)^{n+1} (n+1)!} (x-2)^{n+1} = \frac{(-1)^n}{(1+\xi)^{n+1} (n+1)} (x-2)^{n+1}, \quad 2 < \xi < x.$$

4.9. Разложения основных элементарных функций (асимптотические формулы)

Запишем формулу Тейлора (4.19) при $x_0 = 0$ с остаточным членом в форме Пеано:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + o(x^n). \quad (4.21)$$

Формулу (4.21) называют *формулой Маклорена* разложения функции $f(x)$ по степеням x с остаточным членом в форме Пеано.

1. Пусть $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$. Вычислим производные функции e^x в точке $x_0 = 0$: $f^{(n)}(x) = e^x$, $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$.

Используя формулу (4.21), получим

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

В частности, при $n=1$ и $n=2$ имеем:

$$e^x = 1 + x + o(x), \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

2. Пусть $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$. Вычислим значения производных функции $f(x) = \sin x$ при $x = 0$:

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad f'(0) = 1;$$

$$f''(x) = -\sin x = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad f''(0) = 0;$$

$$f'''(x) = -\cos x = \sin\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad f'''(0) = -1;$$

.....

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad f^{(n)}(0) = \sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ (-1)^{k-1}, & n = 2k-1. \end{cases}$$

Используя формулу (4.21) при $n = 2k$, находим:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^{k+1} x^{2k-1}}{(2k-1)!} + o(x^{2k}).$$

В частности, при $k=1$ и $k=2$ имеем:

$$\sin x = x + o(x^2), \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4).$$

3. Разложение для $f(x) = \cos x$ получается аналогично:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}).$$

В частности, при $n=1$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3).$$

4. Пусть $f(x) = \ln(1+x)$, $x_0 = 0$. Вычислим значения производных функции $f(x) = \ln(1+x)$ при $x=0$:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, f'''(x) = \frac{1 \cdot 2}{(1+x)^3}, f^{(4)}(x) = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(1+x)^4}, \dots,$$

$$f'(0) = 1, f''(0) = -1, f'''(0) = 2!, f^{(4)}(0) = -3!, \dots, f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} (n-1)!$$

Тогда $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. Используя формулу

(4.21), получим:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

В частности, при $n=1$

$$\ln(1+x) = x + o(x).$$

5. Аналогично получаем

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!} x^n + o(x^n).$$

Если $\alpha = -1$, то

$$(1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} ax^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n).$$

Заменив x на $-x$, получим:

$$(1-x)^{-1} = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} ax^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + o(x^n).$$

Пример 4.14. Разложить функцию $f(x) = e^{-x}$ в ряд Маклорена с точностью $o(x^3)$.

Решение. Воспользуемся разложением $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$. Заменим x на $(-x)$, получим

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + o(x^3).$$

На рис. 4.6 изображена кривая $y = e^{-x}$, а также ее приближения $y_1 = 1 - x$, $y_2 = 1 + x - \frac{x^2}{2}$ и $y_3 = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$.

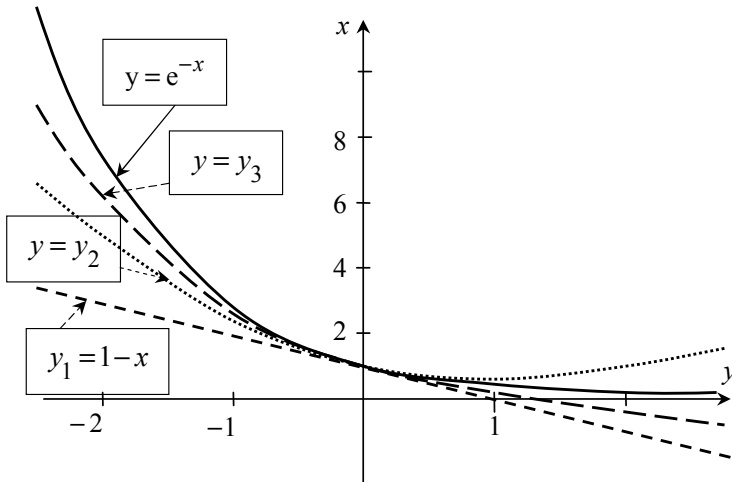


Рис. 4.6. Геометрическая иллюстрация примера 4.14

Пример 4.15. Разложить функцию $f(x) = \operatorname{tg} x$ в окрестности точки $x_0 = 0$, взяв $n = 3$.

Решение. Воспользуемся формулой Маклорена при $n = 3$. Найдем производные $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, $f''(x) = 2 \cos^{-3} x \cdot \sin x$, $f'''(x) = 6 \cos^{-4} x \cdot \sin^2 x + 2 \cos^{-2} x$, отсюда $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = 2$. Получаем

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Пример 4.16. Используя разложения функций по формуле Тейлора, вычислить пределы: а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{x^2}}{x^2}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$.

Решение. а) Воспользуемся разложениями:

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + o(x^2), \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3). \quad \text{Тогда}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left[\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \right) - \left(1 + x^2 + o(x^2) \right) \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 3x^2 + o(x^3) + o(x^2)}{2x^2} = -\frac{3}{2};$$

б) если ограничиться разложением $\sin x = x + o(x^2)$, то в пределе получаем выражение

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + o(x^2) - x}{x(x + o(x^2))} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^2)}{x^2 + o(x)}.$$

Чему равен такой предел, сказать невозможно. Неизвестно, какие бесконечно малые скрываются под $o(x)$ и $o(x^2)$. Поэтому следует взять приближение

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4).$$

Тогда

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right) - x}{x \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \left(\frac{1}{3!} + o(x)\right)}{x^2 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + o(x^3)\right)} = 0.$$

ГЛАВА 5. ИССЛЕДОВАНИЕ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

5.1. Условия возрастания и убывания функции

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале $(a; b)$.

Определение. Функция $f(x)$ называется *строго возрастающей* (строго убывающей) на $(a; b)$, если для любых $x_1, x_2 \in (a; b)$, $x_1 < x_2$, верно неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$). Функция $f(x)$ *возрастает* (убывает) на $(a; b)$, если для любых $x_1, x_2 \in (a; b)$, $x_1 < x_2$ верно неравенство $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$).

Теорема 5.1 (о необходимом и достаточном условии возрастания (убывания) функции)

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$ и дифференцируема $\forall x \in (a; b)$. Тогда:

1) для того чтобы функция f возросла (убывала) на $[a; b]$, необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) для всех $x \in (a; b)$;

2) если производная $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) для всех $x \in (a; b)$, то функция f строго возрастает (строго убывает) на $[a; b]$.

Доказательство

1) *Необходимость.* Пусть $f(x)$ возрастает на $[a; b]$. Покажем, что $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a; b)$. Предположим противное, т.е. $f'(x_0) < 0$, $x_0 \in (a; b)$. Тогда по теореме Ферма (достаточные условия возрастания (убывания) функции в точке) функция f строго убывает в точке $x_0 \in (a; b)$, что противоречит тому, что $f(x)$ возрастает $\forall x \in [a; b]$.

Достаточность. Пусть $f'(x) \geq 0$ для всех $x \in (a; b)$. Для любой пары точек $x_1 < x_2$, таких что $[x_1; x_2] \subset (a; b)$, функция f на отрезке $[x_1; x_2]$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа: $\exists c \in (x_1; x_2)$, для которой $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$. Так как $c \in (x_1; x_2) \subset (a; b)$, то $f'(c) \geq 0$ и, следовательно, $f(x_2) \geq f(x_1)$. Т.о., мы доказали, что функция $f(x)$ возрастает на $[a; b]$.

2) Пусть $f'(x) > 0$ для всех $x \in (a; b)$. По схеме доказательства предыдущего пункта с помощью формулы конечных приращений Лагранжа получаем

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Так как $c \in (x_1; x_2) \subset (a; b)$, то $f'(c) > 0$, и если $x_1 < x_2$, то $f(x_2) > f(x_1)$, то есть функция $f(x)$ возрастает в строгом смысле на $[a; b]$.

Замечание. Условие $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$), будучи достаточным для строгого возрастания (убывания) функции, не является необходимым. Это видно на примере функции $f(x) = x^3$, которая строго возрастает, но $f'(0) = 0$.

5.2. Локальный экстремум

Теорема 5.2 (первое достаточное условие локального экстремума дифференцируемой функции)

Пусть функция f дифференцируема в некоторой окрестности $O_\delta(x_0)$ критической точки x_0 , за исключением, быть может, самой точки x_0 , и непрерывна в точке x_0 . Если при переходе через точку x_0 слева направо производная f' меняет знак с плюса на минус (с минуса на плюс), то в точке x_0 функция f имеет строгий локальный максимум (минимум).

Если же производная f' имеет один и тот же знак слева и справа от точки x_0 , то экстремума в этой точке нет.

Доказательство. Если производная f' меняет знак с «+» на «-», то по теореме предыдущего пункта 5.1 (необходимое и достаточное условие возрастания (убывания) функции) функция $f(x)$ возрастает для значений $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ и $f(x)$ убывает для значений $x \in (x_0; x_0 + \delta)$. Следовательно, $\forall x \in \overset{\circ}{O}_\delta(x_0) \quad f(x_0) > f(x)$, то есть x_0 — точка локального максимума функции $f(x)$ (рис. 5.1).

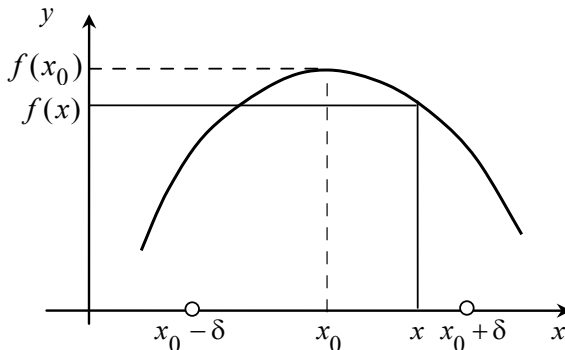


Рис. 5.1. Геометрическая иллюстрация теоремы 5.2

Аналогично доказывается теорема и в случае минимума.

Теорема 5.3. (второе достаточное условие локального экстремума дважды дифференцируемой функции)

Пусть функция f в критической точке x_0 имеет конечную вторую производную. Тогда функция имеет в точке x_0 локальный максимум, если $f''(x_0) < 0$, и локальный минимум, если $f''(x_0) > 0$.

Доказательство. Запишем формулу Тейлора для функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 при $n = 2$:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2).$$

По условию $f'(x_0) = 0$, поэтому $\operatorname{sgn}(f(x) - f(x_0)) = \operatorname{sgn} f''(x_0)$ при $x \rightarrow x_0$. Если $f''(x_0) > 0$ $\forall x \in \mathring{O}_\delta(x_0)$, то $f(x) > f(x_0)$, и следовательно, x_0 — точка локального минимума функции $f(x)$. Если же $f''(x_0) < 0$ $\forall x \in \mathring{O}_\delta(x_0)$, то $f(x) < f(x_0)$, и следовательно, x_0 — точка локального максимума функции $f(x)$.

Пример 5.1. Доказать неравенство $1 + 2 \ln x \leq x^2$ для $x > 0$.

Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 - 2 \ln x - 1$. Имеем $f(1) = 0$, $f'(x) = \frac{2(x^2 - 1)}{x}$. Для $x > 1$ $f'(x) > 0$, а для $0 < x < 1$

$f'(x) < 0$. Таким образом, $f(x)$ на интервале $(0; 1)$ убывает, на интервале $(1; +\infty)$ возрастает, и так как $f(x)$ непрерывна при $x = 1$, то точка $x = 1$ является точкой минимума. Следовательно, для $x > 0$ $f(x) = x^2 - 2 \ln x - 1 \geq f(1) = 0$, откуда и вытекает неравенство $x^2 \geq 1 + 2 \ln x$, $x > 0$.

Пример 5.2. Исследовать на экстремум функцию $y = \frac{(x-1)^3}{3(x+1)^2}$.

Определим промежутки монотонности и экстремумы данной функции. Первая производная функции равна:

$$y'(x) = \frac{(x-1)^2(x+5)}{3(x+1)^3}. \text{ Находим критические точки: } y' = 0 \text{ при}$$

$x = 1, x = -5$ и y' не существует при $x = -1$.

При $x \in (-\infty; -5), x \in (-1; 1) \cup (1; +\infty)$ $y' > 0$, при $x \in (-5; 1)$ $y' < 0$. На каждом из промежутков $(-\infty; -5], (-1; 1], [1; +\infty)$ функция возрастает, на промежутке $[-5; -1)$ убывает (рис. 5.2), в точке $(-5; -4,5)$ имеет локальный максимум. Отметим, что $y'(1) = 0$, т.е. график функции, имеет в этой точке горизонтальную касательную, точка $x = 1$ является критической, но локального экстремума у функции в этой точке нет, т.к. первая производная не меняет знак. Точка $x = -1$ также не является точкой экстремума (заданная функция в ней не определена), хотя производная при переходе через эту точку меняет знак.

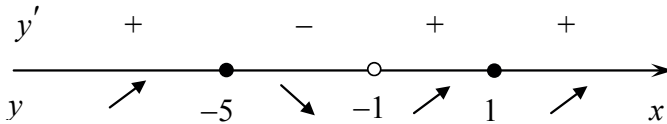


Рис. 5.2. Исследование знака производной и поведения функции из примера 5.2

Пример 5.3. Исследовать на экстремум функцию $y = e^{-x^2}$.

Первая производная функции равна $y' = -2xe^{-x^2}$. Приравняв производную к нулю, находим единственную критическую точку $x = 0$. Далее находим вторую производную $y'' = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}$. Ее значение в точке $x = 0$ равно -2 . Согласно второму достаточному условию локального экстремума делаем вывод о наличии максимума функции и вычисляем $y_{\max}(0) = e^0 = 1$.

5.3. Абсолютный экстремум функции

Для функции $f(x)$ — непрерывной на отрезке $[a; b]$ — понятие $\operatorname{absextr}_{x \in [a; b]} f(x)$ объединяет понятия наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке, то есть $\operatorname{наиб}_{x \in [a; b]} f(x)$ и $\operatorname{наим}_{x \in [a; b]} f(x)$.

Наибольшее (наименьшее) значение непрерывной на отрезке $[a; b]$ функции $f(x)$ достигается либо в критической точке этой функции, либо в граничных точках a и b этого отрезка.

Для нахождения $\operatorname{absextr}_{x \in [a; b]} f(x)$ непрерывной на $[a; b]$ функции $f(x)$ используется *следующая схема решения*.

1. Найти критические точки функции $f(x)$, т. е. те значения $x \in [a; b]$, при которых либо $f'(x) = 0$, либо $f'(x)$ не существует (но в этих точках сама функция $f(x)$ определена и непрерывна).

2. Вычислить значения функции в найденных точках и на концах отрезка $[a; b]$.

3. Найти $\operatorname{наиб}_{x \in [a; b]} f(x)$ и $\operatorname{наим}_{x \in [a; b]} f(x)$. Для этого нужно сравнить значения функции в критических точках (внутри отрезка) со значениями функции в граничных точках отрезка и выбрать среди них наибольшее и, соответственно, наименьшее значения (при этом не требуется анализ характера экстремума этих точек).

Часто вместо $\operatorname{наиб}_{x \in [a; b]} f(x)$ и $\operatorname{наим}_{x \in [a; b]} f(x)$ записывают соответственно $\max_{x \in [a; b]} f(x)$ и $\min_{x \in [a; b]} f(x)$.

5.4. Выпуклость и точки перегиба графика функции

Определение. График дифференцируемой функции f называется *выпуклым вверх* (*выпуклым вниз*) в интервале $(a; b)$, если он расположен не выше (не ниже), любой своей касательной к графику функции на этом интервале (рис. 5.3).

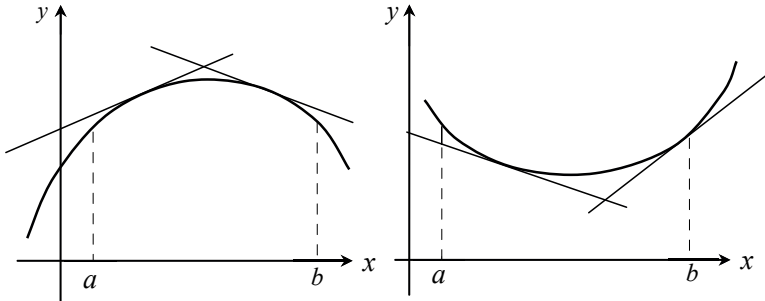


Рис. 5.3. Графики функций, имеющих выпуклость, направленную вверх (слева) и направленную вниз (справа)

Теорема 5.4 (о достаточном условии выпуклости вниз (вверх) графика функции на данном интервале)

Если функция f имеет на интервале a, b вторую производную и $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) для $\forall x \in (a; b)$, то график функции имеет на $(a; b)$ выпуклость, направленную вниз (вверх).

Доказательство. Допустим, что $f''(x) \leq 0 \forall x \in (a; b)$, и докажем, что ее график является выпуклым вверх. Через точку M_0 проведем касательную к графику функции $y = f(x)$. Для доказательства теоремы мы должны установить, что график функции $f(x)$ на $(a; b)$ расположен не выше своей касательной на этом интервале. Пусть x — произвольная точка из $(a; b)$, $y = f(x)$ — ордината графика функции в точке x . Далее $Y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ — орди-

ната касательной, соответствующая значению x . Найдем $y - Y = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) =$

$$= \langle \text{теорема Лагранжа} \rangle = f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = \left| \begin{array}{l} x_0 < c < x, \\ x < c < x_0 \end{array} \right| =$$

$$= (x - x_0)(c - x_0)f''(c_1), \quad c_1 \in (x_0, c) \text{ либо } c_1 \in (c, x_0). \text{ Имеем}$$

$$(x - x_0)(c - x_0) > 0, \quad (5.1)$$

так как либо $(x - x_0 > 0) \wedge (c - x_0) > 0$, либо $(x_0 - x > 0) \wedge (x_0 - c) > 0$. По условию теоремы $f''(c_1) \leq 0$. Поэтому, с учетом (5.1), $y - Y \leq 0$, $y \leq Y$, т.е. график функции $y = f(x)$ направлен выпуклостью вверх на $(a; b)$.

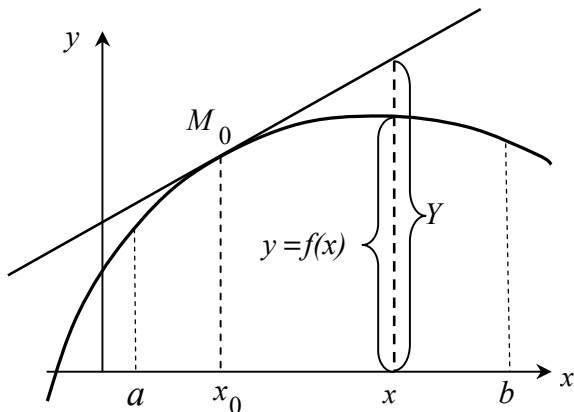


Рис. 5.4. Геометрическая иллюстрация теоремы 5.4

Аналогично доказывается, что при $f''(x) \geq 0$ график функции является выпуклым вниз. Теорема доказана.

Точки перегиба графика функции

Определение. Точка $M_0(x_0; f(x_0))$ называется *точкой перегиба графика функции* $y = f(x)$, если существует такая

окрестность точки x_0 , в пределах которой, слева и справа от нее, направления выпуклости графика функции различны (рис. 5.5).

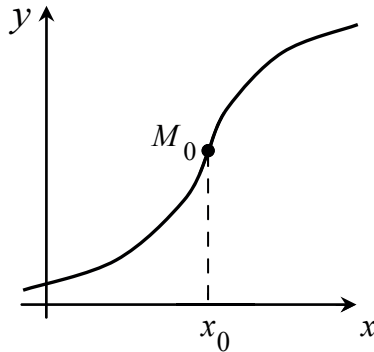


Рис. 5.5. M_0 — точка перегиба графика функции

Пример 5.4. Для $f(x) = \sqrt[3]{x}$ график функции (рис. 5.6) выпуклый вниз на $(-\infty; 0)$ и выпуклый вверх на $(0; +\infty)$. Точка перегиба графика функции $(0; 0)$.

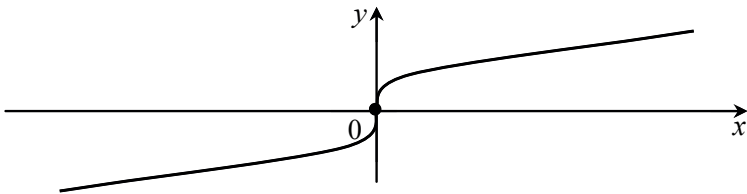


Рис. 5.6. График функции $f(x) = \sqrt[3]{x}$

Пример 5.5. Для $f(x) = \left| \frac{x-1}{x} \right|$ график функции (рис. 5.7) выпуклый вниз на $(-\infty; 0)$ и на $(0; 1)$, выпуклый вверх на

$(1; +\infty)$. Точка $(1; 0)$ — точка перегиба графика функции. Заметим, что здесь точка $x = 1$ является точкой локального минимума функции.

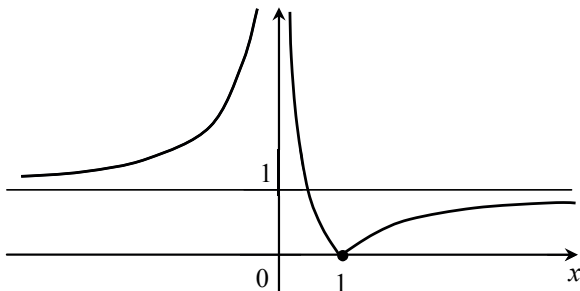


Рис. 5.7. График функции $f(x) = \frac{|x-1|}{x}$

Теорема 5.5 (о необходимом условии существования точки перегиба)

Если функция $y = f(x)$ имеет перегиб в точке $M_0(x_0; f(x_0))$, то $f''(x_0) = 0$, или $f''(x_0)$ не существует.

Доказательство. Пусть точка $M_0(x_0; f(x_0))$ разделяет промежутки выпуклости вниз и вверх (рис. 5.5). Пусть при $x < x_0$ кривая $y = f(x)$ выпукла вниз, а при $x > x_0$ кривая $y = f(x)$ выпукла вверх. Тогда при $x < x_0$ вторая производная $f''(x) \geq 0$, и значит, $f'(x)$ возрастает. При $x > x_0$ $f''(x) \leq 0$, и значит, $f'(x)$ убывает. Это означает, что функция $f'(x)$ имеет максимум в точке x_0 , следовательно, ее производная $(f'(x))' = f''(x)$ в этой точке или равна нулю, или не существует.

Замечание. Необходимое условие точки перегиба не является достаточным. Например, функция $y = x^4$ является выпуклой вниз, так как $y'' = 12x^2 \geq 0$, и значит, не имеет точек перегиба, хотя $y'' = 0$ при $x = 0$.

Определение. Точки, в которых $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует, называют *критическими точками второго рода*.

Чтобы выяснить, является ли критическая точка точкой перегиба, требуется проверить достаточные условия.

Теорема 5.6 (о достаточных условиях существования точки перегиба)

Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0 , в которой либо $f''(x_0) = 0$, либо $f''(x_0)$ не существует, и пусть $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в проколотой окрестности этой точки. Точка $M(x_0; f(x_0))$ является точкой перегиба графика функции, если $f''(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0 .

Доказательство. Пусть, например, вторая производная $f''(x) \geq 0$ при $x < x_0$ и $f''(x) \leq 0$ при $x > x_0$. В этом случае (рис. 5.5) слева от x_0 график функции выпуклый вниз, а справа от x_0 выпуклый вверх, т.е. $M(x_0; f(x_0))$ — точка перегиба графика функции.

Пример 5.6. Исследовать на выпуклость, найти точки перегиба графика функции $y = \ln(x^2 - 2x + 2)$.

Область определения $D(f) = \mathbb{R}$. При $x = 1$ значение функции $y = 0$. Производная $y' = \frac{2x-2}{x^2-2x+2}$. Точка $x = 1$ является точкой минимума функции: $y_{\min} = y(1) = 0$. Вторая производная равна $y'' = \frac{-2x(x-2)}{(x^2-2x+2)^2}$. Знаки второй производной:

$y''(x) < 0$ при $x \in (-\infty; 0)$, $x \in (2; +\infty)$, $y''(x) > 0$ при $x \in (0; 2)$. При $x \in (-\infty; 0)$ и $x \in (2; +\infty)$ график функции выпуклый вверх;

на интервале $(0; 2)$ — выпуклый вниз. График меняет направление выпуклости в двух точках: $x = 0$ и $x = 2$ (рис. 5.8). Поэтому точки перегиба графика функции $(0; \ln 2)$ и $(2; \ln 2)$.

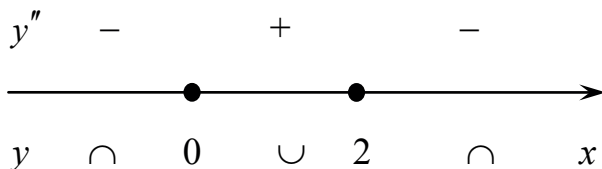


Рис. 5.8. Исследование знака второй производной и поведения функции из примера 5.6

График данной функции представлен на рис. 5.9.

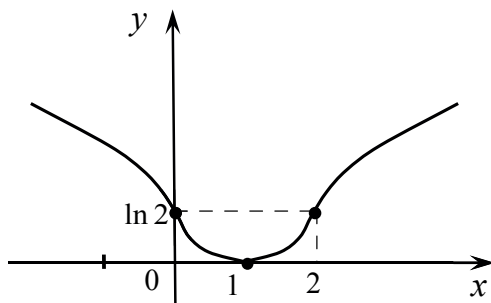


Рис. 5.9. График функции $y = \ln(x^2 - 2x + 2)$

5.5. Асимптоты графика функции

Определение. Прямая L называется *асимптотой графика функции* $f(x)$, если расстояние от точки $M(x; f(x))$ графика функции до этой прямой (измеряемое по перпендикуляру к прямой L) стремится к нулю при бесконечном удалении точки M от начала координат.

Из определения видно, что если график функции имеет асимптоту, то «вдали» от начала координат он похож на прямую линию.

В случае вертикальной асимптоты (рис. 5.10) неограниченное удаление точки графика от начала координат равносильно тому, что $|f(x)| \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow x_0$, а стремление к нулю расстояния между графиком и асимптотой равносильно тому, что $x \rightarrow x_0$. Отсюда следует:

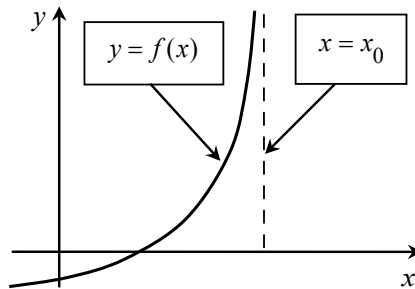


Рис. 5.10. Прямая $x = x_0$ — вертикальная асимптота графика функции

Теорема 5.7. Прямая $x = x_0$ является *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$ тогда и только тогда, когда хотя бы одно из предельных значений $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$ или $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$ равно $+\infty$ или $-\infty$.

Замечание. *Непрерывные функции вертикальных асимптот не имеют.*

Можно заметить, что вертикальные асимптоты тесно связаны с точками разрыва второго рода.

Пример 5.7. Найти вертикальные асимптоты графика функции $f(x) = 3^{\frac{1}{x-2}}$.

Находим $\lim_{x \rightarrow 2-0} 3^{\frac{1}{x-2}} = \left\langle x-2 \rightarrow -0, \frac{1}{x-2} \rightarrow -\infty \right\rangle = \langle 3^{-\infty} \rangle = 0$,

$\lim_{x \rightarrow 2+0} 3^{\frac{1}{x-2}} = \left\langle x-2 \rightarrow +0, \frac{1}{x-2} \rightarrow +\infty \right\rangle = \langle 3^{+\infty} \rangle = +\infty$. Здесь пря-

мая $x=2$ ($y \geq 0$) — правая вертикальная асимптота. Заметим, что $x=2$ — точка разрыва второго рода.

Пример 5.8. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $f(0)$ не существует. Имеем $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Вертикальных асимптот график функции

не имеет.

Пример 5.9. Функция $f(x) = \ln x$ не имеет разрывов, однако $\lim_{x \rightarrow +0} \ln x = -\infty$. Поэтому $x=0$ — вертикальная асимптота.

Перейдем к вопросу о нахождении наклонных асимптот.

Теорема 5.8. Для существования *наклонной асимптоты* $y=kx+b$ графика функции $y=f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$) необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k \wedge \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = b, \quad (5.2)$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = k \wedge \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx) = b \right). \quad (5.3)$$

При этом при $x \rightarrow +\infty$ и при $x \rightarrow -\infty$ указанные пределы могут быть различными (*правая наклонная асимптота* и, соответственно, *левая наклонная асимптота*).

Доказательство. Пусть $y=kx+b$ — наклонная асимптота графика функции. Расстояние от точки графика функции до асимптоты изображается на рисунке (рис. 5.11) отрезком

KM. Заметим, что $\angle KML = \alpha$, $LM = \frac{KM}{\cos \alpha}$. Так как координаты точки *M* есть $(x, f(x))$, то координаты точки *L* есть $(x; kx + b)$. Поэтому $LM = kx + b - f(x)$.

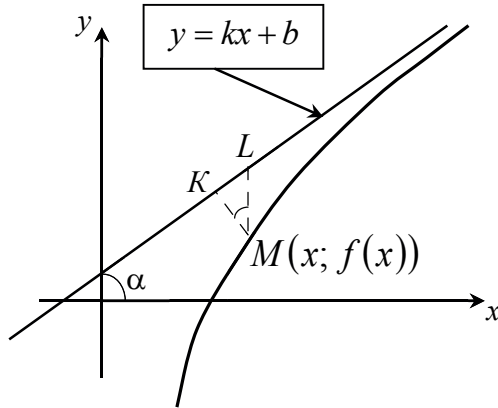


Рис. 5.11. Геометрическая иллюстрация доказательства теоремы 5.8

По определению $y = kx + b$ — наклонная асимптота $\Leftrightarrow KM \rightarrow 0 \Leftrightarrow LM \rightarrow 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0 \Leftrightarrow b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx)$.

Тогда существует бесконечно малая функция $\beta(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, такая что $f(x) - kx = b + \beta(x)$. Разделим обе части последнего равенства на x и в полученном равенстве перейдем

к пределу при $x \rightarrow +\infty$: $\frac{f(x)}{x} - k = \frac{b}{x} + \frac{\beta(x)}{x}$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - k \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{b}{x} + \frac{\beta(x)}{x} \right) = 0. \quad \text{Отсюда} \quad k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Теорема доказана.

Замечание. В случае $\boxed{k=0}$ наклонная асимптота становится горизонтальной.

Замечание. Если хотя бы один из пределов (5.2) при $x \rightarrow +\infty$ ((5.3) при $x \rightarrow -\infty$) не существует или является бесконечным, то график функции наклонных асимптот не имеет.

Пример 5.10. Найти асимптоты графика функции $y = \sqrt[3]{x^2} e^{-\frac{2x}{3}}$.

Область определения функции $D(y) = \mathbf{R}$; $y(x) \geq 0$ при $x \in \mathbf{R}$, $y(0) = 0$.

Вертикальных асимптот нет, т.к. функция непрерывна при всех $x \in \mathbf{R}$. Найдем наклонные асимптоты $y = kx + b$:

$$k_+ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x} \cdot e^{2x/3}} = 0;$$

$$b_+ = \lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{e^{2x/3}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\sqrt[3]{x^2} \right)'}{\left(e^{2x/3} \right)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x} \cdot e^{2x/3}} = 0;$$

$$k_- = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-2x/3}}{\sqrt[3]{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = -2 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2} e^{-2x/3}}{1} = -\infty.$$

Следовательно, при $x \rightarrow +\infty$ имеем правую горизонтальную асимптоту $y = 0$; при $x \rightarrow -\infty$ наклонных и горизонтальных асимптот нет.

5.6. Схема исследования функций и построения кривых

1. Найти область определения функции $D(f)$.
2. Отметить особенности функции (периодичность, четность и нечетность, сохранение знака), найти точки пересечения графика функции с осями координат.

3. Если граничные точки области определения функции принадлежат ей, то найти значение функции в этих точках, в противном случае — выяснить поведение функции в окрестности этих точек. Найти вертикальные асимптоты, если они существуют.

4. Исследовать поведение функции при $x \rightarrow +\infty$ и при $x \rightarrow -\infty$, найти горизонтальные или наклонные асимптоты или убедиться в их отсутствии.

5. Найти интервалы монотонности функции и точки экстремума.

6. Указать интервалы сохранения направления выпуклости и точки перегиба графика функции.

По результатам исследования функции строится ее график.

Пример 5.11. Исследовать функции и построить их графики:

$$1. \quad y = \sqrt[3]{x^2} e^{-\frac{2x}{3}};$$

$$2. \quad y = \sqrt[3]{(x+3)x^2}.$$

$$1. \quad y = \sqrt[3]{x^2} e^{-\frac{2x}{3}}.$$

А) Область определения функции $D(y) = \mathbf{R}$; $y(x) \geq 0$ при $x \in \mathbf{R}$, $y(0) = 0$.

Б) Вертикальных асимптот нет, т. к. функция непрерывна при всех $x \in \mathbf{R}$. Найдем наклонные асимптоты $y = kx + b$:

$$k_+ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x} \cdot e^{2x/3}} = 0;$$

$$b_+ = \lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{e^{2x/3}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\sqrt[3]{x^2} \right)}{\left(e^{2x/3} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x} \cdot e^{2x/3}} = 0$$

$$k_- = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-2x/3}}{\sqrt[3]{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = -2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2} e^{-2x/3}}{1} = -\infty.$$

Следовательно, при $x \rightarrow +\infty$ имеем правую горизонтальную асимптоту $y = 0$; при $x \rightarrow -\infty$ наклонных и горизонтальных асимптот нет.

В) Определим промежутки монотонности и локальные экстремумы данной функции. Первая производная функции

$$y' = \frac{2e^{-2x/3}(1-x)}{3\sqrt[3]{x}}.$$

Находим критические точки: $y' = 0$ при

$x = 1$ и y' не существует при $x = 0$. При $x \in (-\infty; 0)$ и при $x \in (1; +\infty)$ $y' < 0$, при $x \in (0; 1)$ $y' > 0$. На каждом из промежутков $(-\infty; 0]$, $[1; +\infty)$ функция убывает, на промежутке $x \in [0; 1]$ функция возрастает (рис. 5.12).

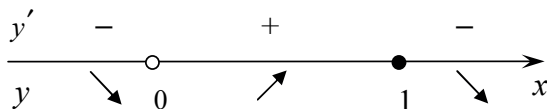


Рис. 5.12. Исследование знака производной и поведения функции

Точка локального минимума $(0; 0)$; локального максимума $(1; \sqrt[3]{e^{-2}}) \approx (1; 0,51)$; в точке $(0; 0)$ — вертикальная полукасательная $x = 0$, $y(x) \geq 0$.

Г) Определим промежутки выпуклости и точки перегиба графика функции. Вторая производная равна

$$y''(x) = \frac{2e^{-2x/3}(2x^2 - 4x - 1)}{9x\sqrt[3]{x}}.$$

Найдем корни уравнения

$$2x^2 - 4x - 1 = 0: \quad x_1 = 1 - \frac{\sqrt{6}}{2}, \quad x_2 = 1 + \frac{\sqrt{6}}{2} \quad (x_1 \approx -0,22; x_2 \approx 2,22).$$

Так как $y'' > 0$ при $x \in (-\infty; x_1)$ и при $x \in (x_2; +\infty)$, то на этих интервалах график функции является выпуклым вниз. Аналогично при $x \in (x_1; 0) \cup (0; x_2)$ $y'' < 0$, т. е. на соответствующих интервалах график функции выпуклый вверх (рис. 5.13).

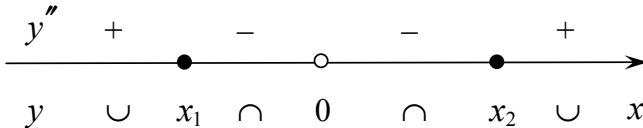


Рис. 5.13. Исследование знака второй производной и поведения функции

Точки перегиба графика функции $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$. Здесь $y_1 = y(x_1) \approx 0,43$, $y_2 = y(x_2) \approx 0,39$. График функции представлен на рис. 5.14.

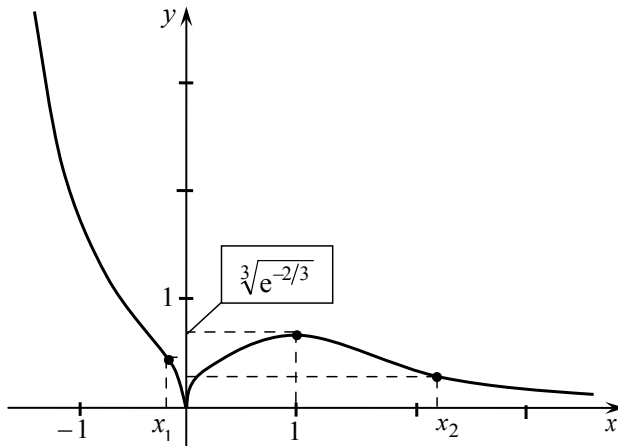


Рис. 5.14. График функции $y = \sqrt[3]{x^2} e^{-\frac{2x}{3}}$

$$2. \quad y = \sqrt[3]{(x+3)x^2}.$$

Область определения $D(y) = \mathbf{R}$; $y = 0$ при $x = 0$ и при $x = -3$. При $x \in (-\infty; -3)$ $y < 0$, а при $x \in (-3; 0) \cup (0; +\infty)$ $y > 0$. Точки $(-3; 0)$ и $(0; 0)$ являются точками пересечения графика функции с осями координат.

А) Вертикальных асимптот нет, так как функция определена и непрерывна на множестве действительных чисел. Для наклонной асимптоты $y = kx + b$ найдем коэффициенты:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt[3]{(x+3)x^2}}{x} = 1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt[3]{(x+3)x^2} - x) = 1,$$

т. е. $y = x + 1$ — наклонная асимптота.

Б) Найдем производную $y'(x) = \frac{x+2}{\sqrt[3]{(x+3)^2 x}}$; $y'(x) = 0$

при $x = -2$ и $y'(x)$ не существует при $x = -3$ и при $x = 0$.

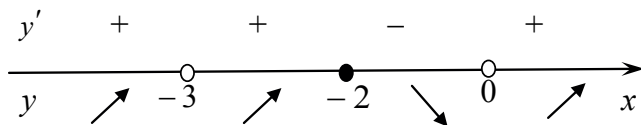


Рис. 5.15. Исследование знака производной и поведения функции

При $x \in (-2; 0)$ $y' < 0$; при $x \in (-\infty; -3)$, $x \in (-3; -2)$, $x \in (0; +\infty)$ $y' > 0$. На промежутке $[-2; 0]$ функция убывает, на промежутках $(-\infty; -3]$, $[-3; -2]$, $[0; +\infty)$ возрастает (рис. 5.15). В точке $(-2;$

$\sqrt[3]{4}$) функция имеет локальный максимум, в точке $(0; 0)$ локальный минимум. Отметим, что $y'(-2)=0$, т.е. график функции имеет в этой точке горизонтальную касательную. В точке $(-3; 0)$ имеем вертикальную касательную $x=-3$ (функция $y=\sqrt[3]{(x+3)x^2}$ в точке $x=-3$ непрерывна и $\lim_{x \rightarrow -3} y'(x)=+\infty$). Поскольку $y(x)$ непрерывна в нуле и

$\lim_{x \rightarrow 0-} y'(x)=-\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0+} y'(x)=+\infty$, то полупрямая $x=0$, $y \geq 0$ яв-

ляется и левой и правой полукасательной к графику функции в точке $(0; 0)$.

Определим промежутки выпуклости и точки перегиба графика функции. Находим вторую производную

$$y''(x) = -\frac{2}{\sqrt[3]{x^4(x+3)^5}}. \text{ Знаки второй производной: } y''(x) < 0$$

при $x \in (-3; 0)$ и при $x \in (0; +\infty)$, $y''(x) > 0$ при $x \in (-\infty; -3)$ (рис. 5.16). Точка перегиба графика функции $(-3; 0)$. На промежутке $(-\infty; -3)$ график функции выпуклый вниз; на промежутках $(-3; 0)$ и $(0; +\infty)$ — выпуклый вверх.

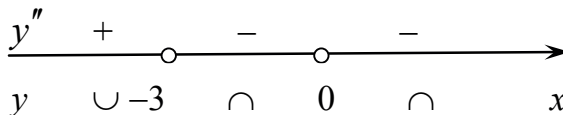


Рис. 5.16. Исследование знака второй производной и поведения функции

График функции представлен на рис. 5.17.

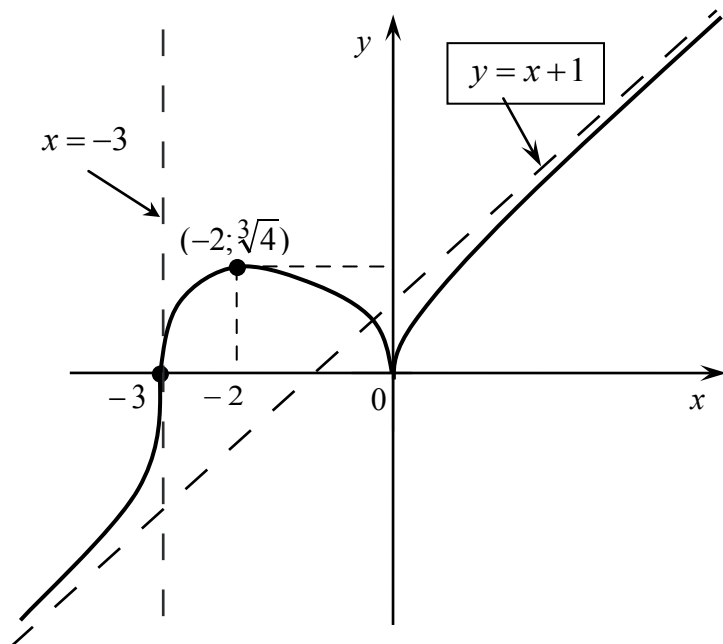


Рис. 5.17. График функции $y = \sqrt[3]{(x+3)x^2}$

ГЛАВА 6. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ В ЭКОНОМИКЕ

6.1. Определение суммарных, средних и предельных величин в экономике

Под *суммарной (совокупной) величиной* $F(x)$ понимают любую функцию независимой переменной $F(x)$. Как правило, в экономике под суммарными понимаются абсолютные величины: доход (выручка) $R = R(q)$ или издержки $C = C(q)$ как функции объема выпуска, объем выпуска как функция количества переменного ресурса, например труда, $Q_L = Q(L)$, полезность $U = U(x)$ как функция количества потребляемого блага и другие экономические показатели.

Средняя величина $AF(x)$ определяется как отношение суммарной величины к независимой переменной:
$$AF(x) = \frac{F(x)}{x}$$
. Буква A — сокращение от Average (средняя). Средняя величина может обозначаться также $\bar{F} = AF(x)$.
Примеры средних величин в экономике: средняя выручка

(доход) $AR = \frac{R(q)}{q}$, средний продукт труда $AQ_L = \frac{Q(L)}{L}$

и т. д.

Маржинальная (предельная) величина $MF(x)$ определяется как производная суммарной величины $F(x)$ по независимой переменной x : $MF(x) = F'(x) \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x}$ в случае,

когда независимая переменная меняется непрерывно. Если суммарная величина меняется дискретно, то под маржинальной (предельной) величиной понимают отношение изменения $\Delta F(x)$ суммарной величины $F(x)$ к изменению (приращению) Δx независимой переменной x : $MF(x) = \frac{\Delta F(x)}{\Delta x}$.

Примеры предельных величин в экономике: предельная выручка (доход) $MR = R'(q)$ или $\frac{\Delta R}{\Delta q}$, предельный продукт труда $MQ_L = Q'(L)$ или $\frac{\Delta Q}{\Delta L}$, предельная полезность $MU_x = U'(x)$ или $\frac{\Delta U}{\Delta x}$ и т. д.

6.2. Примеры использования функций из области экономики

1. Функция полезности (функция предпочтений)

Для анализа потребительских предпочтений используется понятие *полезности*. *Полезность* какого-либо блага есть его способность удовлетворять какие-либо потребности человека или общества.

Совокупная полезность TU (*total utility*) есть совокупное удовлетворение, получаемое человеком в результате потребления данного количества товаров или услуг за данное время.

Функция полезности (*функция предпочтений*) показывает количественную зависимость совокупной полезности блага от объема потребления каждого из n благ за данный промежуток времени.

Математически *функция полезности* задается как функция, зависящая от потребления за определенный период времени n -го количества товаров:

$$TU = U(q_1, q_2, \dots, q_n),$$

где q_i — i -й товар, включенный в потребительский набор.

Предельная полезность (*marginal utility*) — это дополнительная полезность, получаемая человеком от потребления одной дополнительной единицы данного блага за единицу времени.

Математически предельная полезность является первой производной функции совокупной полезности по количеству данного блага:

$$MU = (TU)'(q) = \frac{d(TU)}{dq},$$

где $d(TU)$ — приращение совокупной полезности, dq — количество потребляемого блага. Одним из простых и наиболее часто применяемых примеров функции совокупной полезности является кубическая функция:

$$TU = a + bq + cq^2 - dq^3,$$

где q — количество потребляемого товара, a, b, c, d — положительные константы.

Начиная с некоторого момента (точка насыщения) дополнительная полезность от потребления одного дополни-

тельного блага уменьшается по мере того, как возрастает объем потребления данного блага. Эта закономерность носит универсальный характер и называется *законом убывания предельной полезности*. Математически это означает, что *вторая производная общей полезности по количеству данного блага является отрицательной величиной*.

Задача 1. Определение точки насыщения

Пусть дана функция полезности отдельного потребителя: $TU = 120q - 2,5q^2$.

Определить точку, при которой совокупная полезность TU является максимальной и человек достигает насыщения.

Решение. Функция совокупной полезности достигает своего максимума при условии $MU = (TU)'(q) = 0$:

$$MU = \frac{d(TU)}{dq} = (120q - 2,5q^2)' = 120 - 5q = 0.$$

Таким образом, точка $q = 24$ является искомой точкой насыщения.

Задача 2. Закон убывания предельной полезности

Пусть функция полезности задана уравнением:

$$TU = 25q + 5q^2 - \frac{1}{3}q^3.$$

Найти объем потребления, при котором начинает действовать закон убывания предельной полезности, то есть предельная полезность начинает уменьшаться.

Решение. Найдем функцию предельной полезности:

$$MU = \frac{d(TU)}{dq} = \left(25q + 5q^2 - \frac{1}{3}q^3 \right)' = 25 + 10q - q^2.$$

Очевидно, что MU начнет уменьшаться в точке, в которой функция предельной полезности имеет максимальное

значение. Приравняв $\frac{d(MU)}{dq}$ к нулю и решая это уравнение относительно q , получаем:

$$\frac{d(MU)}{dq} = \frac{d^2(TU)}{dq^2} = (25 + 10q - q^2)' = 10 - 2q = 0.$$

Отсюда $q = 5$ — степень потребления, при которой начинается уменьшение предельной полезности.

2. *Производительность труда*

Рассмотрим однофакторную, или одноресурсную, производственную функцию $y = f(x)$, которая дает объем производимой продукции за единицу времени в зависимости от объема x затраченного ресурса (например, от количества труда). Предположим, что число работников фирмы равно L . Для оценки эффективности производства часто используется *средняя производительность* труда, которая равна $Af(L) = \frac{f(L)}{L}$.

Если считать, что производственная функция дифференцируема, то $f(L+1) \approx f(L) + f'(L)$. Если число L велико, то $f'(L) \approx f(L+1) - f(L)$. Поэтому $f'(L)$ приближенно равна объему добавочной продукции, производимой новым («еще одним») сотрудником за единицу времени.

Производную производственной функции в точке L экономисты называют *предельной или маржинальной производительностью труда* (предельной эффективностью ресурса L).

Пусть p — цена единицы продукции, v — зарплата работника за единицу времени. Тогда если

$$p f'(L) > v,$$

то надо нанять еще одного сотрудника, так как он приносит фирме больше, чем она ему платит. Это несложное правило имеет универсальный характер и называется *золотым правилом экономики*.

Задача 1. Закон убывающей эффективности производства

Этот закон утверждает, что при увеличении одного из основных факторов производства, например затрат живого труда L , прирост производства начиная с некоторого значения L является убывающей функцией. Иными словами, объем произведенной продукции $Q(L)$ описывается графиком со сменой выпуклости вниз на выпуклость вверх.

Пример 6.1. Пусть эта функция задана уравнением $Q(L) = -\frac{L^3}{3} + 4L^2$. Проследим за производственным процессом (рис. 6.1).

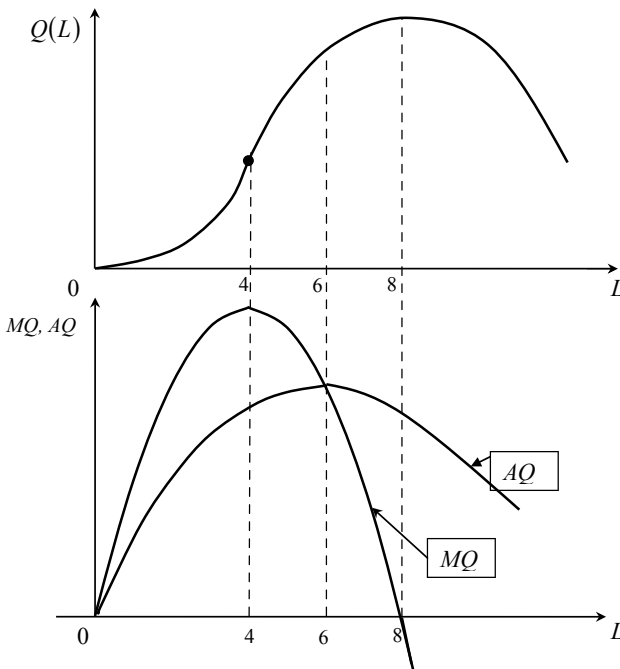


Рис. 6.1. Суммарный, средний и предельный продукты труда

Найдем предельную эффективность (предельную производительность) ресурса L :

$$MQ(L) = Q'(L) = \left(-\frac{L^3}{3} + 4L^2 \right)' = -L^2 + 8L.$$

Далее находим вторую производную

$$Q''(L) = \left(-\frac{L^3}{3} + 4L^2 \right)'' = (-L^2 + 8L)' = -2L + 8. \quad \text{Приравнивая}$$

ее нулю, получаем $-2L + 8 = 0 \Rightarrow L = 4$. При L от 0 до 4 работников происходит ускоренный рост совокупного объема выпуска. Повышается средняя производительность труда

$$AQ(L) = \frac{Q(L)}{L}, \quad \text{предельная производительность труда}$$

$MQ(L) = Q'(L)$ также увеличивается и достигает своего максимального значения при $L = 4$ работника. Этот этап называют *этапом возрастающей отдачи*. Заметим, что в этом случае $Q''(L) = -2L + 8 > 0$ и график $Q(L) = -\frac{L^3}{3} + 4L^2$ является выпуклым вниз.

Следующий этап — *этап убывающей отдачи* при L от 4 до 8 работников. При продолжающемся росте объема выпуска наблюдается постепенное сокращение предельной производительности труда до нулевого уровня: $MQ(L) = 0$ при $L = 8$. В этих условиях объем производства становится максимально возможным, и его дальнейшее увеличение за счет прироста *только численности* персонала становится *невозможным*.

Наконец, последний этап — *этап отрицательной отдачи* (при L от 9 работников и более). Сокращается объем выпуска продукта, а предельный продукт $MQ(L)$ становится отрица-

тельным. Использование дополнительных трудовых ресурсов становится экономически неоправданным.

Задача 2. Вычисление производительности труда, скорости и темпа ее изменения

Пример 6.2. Объем продукции Q (тыс. руб.) в течение рабочего дня, выпускаемой некоторой фирмой, можно выразить функцией $Q = -2t^3 + 30t^2 + 48t + 650$, где t — время. Найти производительность труда, скорость и темп ее изменения:

а) в начале дня ($t = 1$); б) в середине дня ($t = 4$); в) в конце дня ($t = 7$).

Решение. Производительность труда выражается производной

$$v(t) = MQ(t) = Q'(t),$$

а скорость и темп ее изменения — соответственно производной

$$v'(t) = Q''(t)$$

и логарифмической производной

$$T_v(t) = (\ln v(t))' = \frac{v'(t)}{v(t)}.$$

Для заданной производственной функции находим:

$$v(t) = Q'(t) = -6t^2 + 60t + 48 \text{ (ед./ч)},$$

$$v'(t) = (-6t^2 + 60t + 48)' = -12t + 60 \text{ (ед./ч}^2\text{)},$$

$$T_v(t) = \frac{v'(t)}{v(t)} = \frac{-12t + 60}{-6t^2 + 60t + 48} \text{ (ед./ч)}.$$

В заданные моменты времени $t_1 = 1, t_2 = 4, t_3 = 7$ имеем:

$$v(1)=102, v'(1)=48, T_v(1)=\frac{48}{102}=\frac{8}{17};$$

$$v(4)=192, v'(4)=12, T_v(4)=\frac{12}{192}=\frac{1}{16};$$

$$v(7)=174, v'(7)=-24, T_v(7)=-\frac{24}{174}=-\frac{4}{29}.$$

Итак, к концу рабочего дня производительность труда снижается; при этом изменение знака $v'(t)$ и $T_v(t)$ с плюса на минус свидетельствует о том, что увеличение производительности в начале рабочего дня сменяется ее снижением в последние часы.

3. Издержки производства

Если издержки производства $y = C(q)$ (стоимость изготовления q экземпляров некоторого продукта), то $y' = C'(q)$ будет выражать *предельные издержки* производства и приближенно характеризовать прирост переменных затрат на производство дополнительной единицы продукции: $MC = C'(q) \approx C(q+1) - C(q)$ ($\Delta q = 1$). *Средние издержки* являются издержками на единицу выпуска продукции:

$$AC(q) = \frac{C(q)}{q}.$$

Пример 6.3. Функция издержек фирмы задана формулой $C(q) = 4q + 2q^2$. По какой цене реализует фирма свою продукцию, если производство 10 единиц обеспечивает фирме прибыль в размере 60 тыс. у. е.?

Суммарная выручка фирмы равна произведению pq , поэтому *суммарная прибыль*

$$\Pi = pq - (4q + 2q^2).$$

При $q=10$ прибыль $\Pi=60$ тыс. у. е. Поэтому $60 = p \cdot 10 - (4 \cdot 10 + 2 \cdot 10^2)$, и, следовательно, $p=30$ тыс. у. е. Таким образом, фирма реализует свою продукцию по цене $p=30$ тыс. у. е.

Пример 6.4. Зависимость между издержками производства C и объемом продукции q выражается функцией $C=100q+4q^2-0,05q^3$. При каком объеме продукции q пре-

дельные и средние издержки совпадают? Определить средние и предельные издержки: а) при $q=25$ ед.; б) при $q=50$ ед. В каком случае выгодно увеличивать объем производства?

Предельные и средние издержки соответственно равны:

$$MC(q) = C'(q) = 100 + 8q - 0,15q^2,$$

$$AC(q) = \frac{C(q)}{q} = 100 + 4q - 0,05q^2.$$

Приравнивая их, находим $100 + 8q - 0,15q^2 = 100 + 4q - 0,05q^2 \Rightarrow 4q = 0,1q^2 \Rightarrow q = 40$ ($q \neq 0$).

Итак, при $q=40$ ед. предельные и средние издержки совпадают.

Предельные издержки меньше средних $C'(q) < \frac{C(q)}{q}$ при $q > 40$, наоборот, $C'(q) > \frac{C(q)}{q}$ при $q < 40$.

Так, при $q=25$: $C'(q)|_{q=25} = 100 + 8 \cdot 25 - 0,15 \cdot 25^2 = 206,25$, $\frac{C(q)}{q}|_{q=25} = 100 + 4 \cdot 25 - 0,05 \cdot 25^2 = 168,75$. Предельные издер-

жки превышают средние, и поэтому при $q < 40$ увеличивать объем производства невыгодно.

$$\begin{aligned} \text{При } q = 50 \text{ имеем: } C'(q)|_{q=50} &= 100 + 8 \cdot 50 - 0,15 \cdot 50^2 = 125, \\ \frac{C(q)}{q} \Big|_{q=50} &= 100 + 4 \cdot 50 - 0,05 \cdot 50^2 = 175. \end{aligned}$$

Предельные издержки

меньше средних, и поэтому при $q > 40$ выгодно расширять объем производства.

4. Функция спроса $QD := D(p)$ — зависимость спроса (*demand*) на некоторый товар от его цены p (*price*). Например, функция спроса на какой-либо товар может определяться следующим выражением:

$$QD = D(p) = k p^a + c, \quad (6.1)$$

где $a < 0$. Чем меньше цена p , тем больше величина спроса на товар при постоянной покупательной способности населения. Ввиду того, что функция спроса — убывающая функция цены, ее производная отрицательна, и абсолютное значение производной показывает уменьшение спроса со стороны покупателей на товар при повышении его цены на одну единицу.

5. Функция предложения $QS := S(p)$ — зависимость предложения (*supply*) некоторого товара от его цены p . Предложение растет с увеличением цены на товар, и потому зависимость предложения S от цены p может быть смоделирована равенством:

$$QS = S(p) = p^b + d, \quad (6.2)$$

где $b \geq 1$. Производная функции предложения дает приблизительно увеличение предложения товара со стороны продавцов (производителей) при увеличении цены на одну единицу.

Для экономики представляет интерес *условие равновесия*, т. е. условие, при котором *спрос равен предложению*; это условие задается уравнением

$$QS = QD \quad (6.3)$$

и соответствует точке E пересечения кривых QS и QD , называемой точкой равновесия (рис. 6.2). Цена p_0 , при которой выполняется условие (6.3), называется *равновесной ценой*.

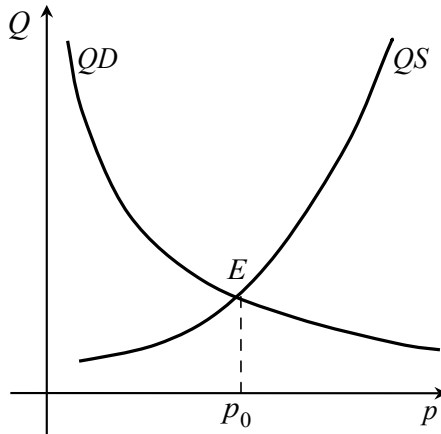


Рис. 6.2. Точка равновесия

Спрос и предложение не всегда являются уравновешенными на реальном рынке, однако можно говорить о существовании *тенденции к равновесию*.

Предположим, что фактическая цена, установившаяся на рынке p_1 , превышает по какой-либо причине цену равновесия p_0 (рис. 6.3). Предприятия готовы продать большее количество товаров, чем могут приобрести при этой цене покупатели:

$$QS_1 > QD_1.$$

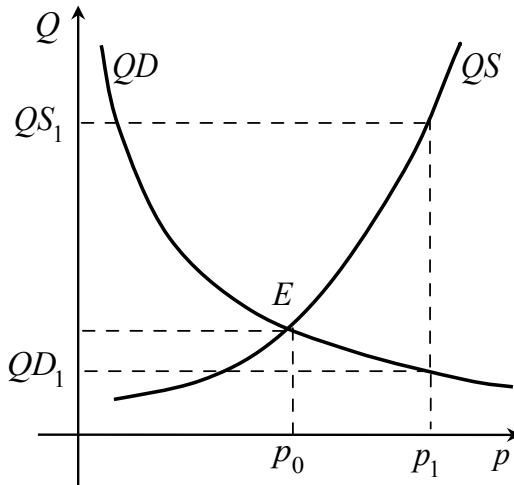


Рис. 6.3. Установление рыночного равновесия

Возникает избыток предложения, постепенно приводящий к понижению рыночной цены до уровня равновесия.

Напротив, если фактическая цена ниже цены равновесия, то на рынке образуется дефицит товаров, возникает тенденция цены к повышению до уровня равновесия.

Пример 6.5. Дана функция предложения $s = 4p - 8$, где p — цена товара. Если равновесный объем спроса-предложения равен 8, то функция спроса $q = q(p)$ может иметь вид

$$1) q = 10 - p + \sqrt{p}; \quad 2) q = 20 - 2\sqrt{p}; \quad 3) q = \frac{20}{\sqrt{p}}; \quad 4) q = 2p.$$

Решение. Вычислим равновесную цену спроса-предложения из условия $s = 8$: $8 = 4p - 8$. Решив это уравнение, получим $p = 4$. Тогда в качестве функции спроса можно взять *убывающую* функцию, которая проходит через точку с координатами $p = 4$, $q = 8$. Этим условиям удовлетворяет, например, функция $q = 10 - p + \sqrt{p}$. Ее производная

$$q' = \left(-1 + \frac{1}{2\sqrt{p}} \right)_{p=4} = -1 + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4} < 0. \text{ Точка } p=4, q=8 \text{ удовлет-}$$

воряет также и уравнению $q=2p$, однако $q'=2>0$, т.е. функция $q=2p$ не может быть функцией спроса, т.к. она возрастает.

Пример 6.6. Спрос и предложение на некоторый товар на рынке описываются линейными зависимостями вида: $Q(p)=23-3p$, $S(p)=5+6p$. При каких значениях p появляется дефицит товара и при каких значениях цены появляются излишки товара? Что можно в каждом из этих случаев сказать об изменении рыночных цен?

Решение. Равновесная цена определяется из уравнения $23-3p=5+6p$. Решая его, находим $p_0=2$. Если $p>2$, то предприятия готовы продать большее количество товаров, чем могут приобрести при этой цене покупатели, появляются излишки товара, в этом случае рыночные цены нужно понижать до уровня равновесия. Если же $p<2$, то на рынке предложение недостаточно, образуется дефицит товаров, появляется тенденция повышения рыночных цен до уровня равновесия.

Паутинная модель рынка

Рассмотрим простейшую задачу поиска равновесной цены. Это одна из проблем рынка, так как стабильность рыночного равновесия позволяет определять границы целесообразности государственного вмешательства в рыночный механизм. Пусть сначала цену p_1 назначает производитель (в простейшей схеме он же и продавец). Цена p_1 на самом деле выше равновесной (всякий производитель стремится получить максимум выгоды из своего производства). Покупатель оценивает спрос D_1 при этой цене и определяет свою цену p_2 , при которой этот спрос D_1 равен предложению.

Цена p_2 ниже равновесной (всякий покупатель стремится купить подешевле).

В свою очередь, производитель оценивает спрос D_2 , соответствующий цене p_2 , и определяет свою цену p_3 , при которой спрос равен предложению: эта цена выше равновесной. Процесс торга продолжается и при определенных условиях приводит к устойчивому приближению к равновесной цене, т. е. к «скручиванию» спирали. Если рассматривать последовательность чисел, состоящую из называемых в процессе торга цен, то она имеет своим пределом равновесную цену p_0 : $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p_0$ (рис. 6.4).

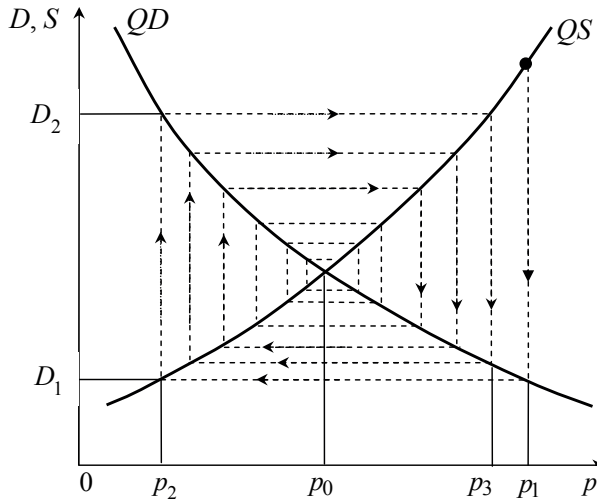


Рис. 6.4. Поиск равновесной цены

Однако поиск равновесной цены *не всегда* приводит к «скручиванию» спирали. Кривые спроса и предложения могут иметь вид, отличающийся от кривых, описываемых уравнениями (6.1) и (6.2). Например, пусть

предложение явно недостаточно и в формуле (6.2) $b < 1$, т.е. $QS = S(p) = \sqrt[m]{p} + d, m > 1$, а покупательная способность населения чрезвычайно низка и в формуле (6.1) $k < 0$. В этом случае процесс торга «раскручивает» спираль цен и уводит от p_0 (рис. 6.5).

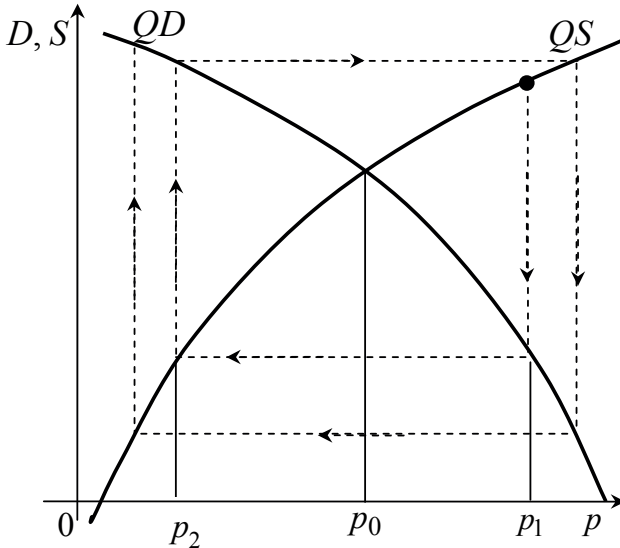


Рис. 6.5. «Раскручивание» спирали цен

6. Функция потребления и сбережения

Если x — национальный доход, $C(x)$ — функция потребления (часть дохода, которая тратится), а $S(x)$ — функция сбережения (сбережения населения), то $x = C(x) + S(x)$. Дифференцируя, получим

$$\boxed{\frac{dC}{dx} + \frac{dS}{dx} = 1},$$

где $\frac{dC}{dx}$ — предельная склонность к потреблению; $\frac{dS}{dx}$ — предельная склонность к сбережению.

6.3. Эластичность функции и ее применение в экономическом анализе

Напомним **определение** (подробное изложение этого вопроса — в п. 3.8).

Эластичностью $E_x(y)$ функции $y = f(x)$ по аргументу x называется предел отношения относительного изменения функции y к относительному изменению переменной x при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} \right) = x \cdot \frac{y'}{y}.$$

Виды эластичностей в экономике

Эластичность спроса по цене $E_p(D) = p \cdot \frac{D'(p)}{D(p)}$, показыва-

ющая относительное изменение (выраженное в процентах) величины спроса $Q_D := D(p)$ (объема потребления) на какое-либо благо при изменении цены p этого блага на 1 %. Производная функции спроса *отрицательна* (функция $D(p)$ убывает), и *эластичность спроса* имеет также *отрицательный знак*.

Различают *три вида спроса* в зависимости от величины $E_p(D)$:

1. Если $|E_p(D)| > 1$ ($E_p(D) < -1$), то спрос считается *эластичным*. В этом случае повышению цены на 1 % соответствует понижение спроса *более* чем на один процент, и наоборот,

понижение цены на один процент приводит к росту покупок более чем на 1 %.

2. Если $|E_p(D)| < 1$ ($-1 < E_p(D) \leq 0$), то спрос *неэластичный*. В этом случае повышение цены на 1 % влечет за собой понижение спроса *менее* чем на 1 %, и наоборот, уменьшение цены на 1 % приводит к росту покупок более чем на 1 %.

3. Если $|E_p(q)| = 1$ ($E_p(q) = -1$), то спрос *нейтрален*.

Пример 6.7. Пусть $QD = D(p) = ap^b$, где $a \geq 0$, $b < 0$.

$$E_p(D) = p \cdot \frac{D'}{D} = p \cdot \frac{abp^{b-1}}{ap^b} = b.$$

Важно отметить, что $E_p(D) = b$ при всех значениях p , т. е. кривая спроса $D(p) = ap^b$, где $a \geq 0$, $b < 0$, имеет постоянную эластичность, равную b .

Пример 6.8. В экономике цена обычно откладывается по вертикальной оси, а величина спроса — по горизонтальной оси, уравнение спроса обычно записывается так, что цена p является функцией спроса $q := Q_D = D(p)$, а не q — функцией p . Рассмотрим уравнение спроса: $p = 940 - 48q + q^2$. Какова эластичность спроса по цене при продаже 10 единиц продукции?

При $q = 10$, $p = 940 - 480 + 100 = \$560$. Найдем $\frac{dq}{dp} = \frac{1}{dp/dq} = \frac{1}{-48 + 2q}$.

При $q = 10$ получим $q' = \frac{dq}{dp} = \frac{1}{-48 + 2 \cdot 10} = -\frac{1}{28}$. Поэтому

$E_p(q) = p \cdot \frac{q'}{q} = 560 \cdot \frac{\left(-\frac{1}{28}\right)}{10} = -2$. Таким образом, изменение

цены на 1 % от текущей цены \$ 560 изменит величину спроса в обратном направлении на 2 %. Мы приходим к выводу, что при цене \$ 560 спрос эластичен.

$$\text{Эластичность спроса по доходу } E_R(q) = \frac{dq}{dR} \cdot \frac{R}{q} \quad (q := Q_D = D(p)),$$

характеризующая относительное изменение (в процентах) величины спроса q на какое-либо благо при изменении дохода $R = R(q)$ потребителей этого блага на 1 %.

Положительная эластичность спроса по доходу характеризует качественные товары, а отрицательная величина — некачественные товары.

Так, высокий положительный коэффициент спроса по доходу в отрасли указывает, что ее вклад в экономический рост больше, чем доля в структуре экономики, и она имеет шансы на расширение. Наоборот, если коэффициент эластичности спроса на продукцию отрасли по доходу имеет небольшое положительное или отрицательное значение, то ее может ожидать застой и перспектива сокращения производства.

$$\text{Эластичность предложения по цене } E_p(S) = \frac{dS}{dp} \cdot \frac{p}{S} = p \cdot \frac{S'}{S},$$

показывающая относительное изменение (выраженное в процентах) величины предложения $S = S(p)$ какого-либо товара при изменении цены этого товара на 1 %. Производная функции предложения положительна, и эластичность предложения также положительна; при $0 < E_p(S) < 1$ имеем неэластичное предложение, при $E_p(S) > 1$ — эластичное.

Связь эластичности с выручкой продавцов (расходами покупателей)

Выручка (доход) R равна произведению цены p на товар на величину спроса $q := D(p)$:

$$\boxed{R = pq}.$$

Используя формулу для эластичности произведения функций, получим:

$$E_p(R) = E_p(q) + E_p(p) = E_p(q) + 1 = 1 - |E_p(q)|,$$

так как эластичность спроса по цене всегда отрицательна (поскольку $q'(p) < 0$). Теперь проанализируем все варианты эластичности спроса, приведенные выше.

1. $E_p(q) < -1$; тогда эластичность выручки по цене отрицательна ($E_p(R) < 0$). Это означает, что при эластичном спросе изменение выручки происходит в направлении, противоположном изменению цены, и для повышения выручки продавцам выгодно понижать цену. Аналогично, повышение налога на товар с эластичным спросом повлечет за собой сокращение дохода от налогообложения.

2. $-1 < E_p(q) < 0$; тогда $E_p(R) > 0$ для товаров с неэластичным спросом. Это означает, что изменение цены вызывает изменение выручки в том же направлении и продавцам выгодно повышать цену (что приводит к увеличению их выручки).

3. $E_p(q) = -1$. В этом случае $E_p(R) = 0$, т.е. при нейтральном спросе изменение цены на товар не влияет на выручку.

При эластичном спросе выручка растет с увеличением количества или уменьшения цены, а при неэластичном — падает. Например, доходы фермеров сократятся при хорошем урожае, поскольку эластичность спроса на сельскохозяйственную продукцию достаточно низка. Аналогично, повышение цен на государственных предприятиях с целью увеличения поступлений в бюджет, например повышение цен на железнодорожные билеты, может привести к сокращению поступлений в бюджет, если спрос на соответствующий товар или услугу окажется эластичным.

Таблица 1

Изменение цены, эластичности по цене и выручки

Изменение цены	Эластичный спрос: $ E_p(q) > 1$	Неэластичный спрос: $0 < E_p(q) < 1$	Единичная эластичность спроса: $E_p(q) = -1$
$p \downarrow$	$R \uparrow$	$R \downarrow$	Доход не меняется
$p \uparrow$	$R \downarrow$	$R \uparrow$	Доход не меняется

Пример 6.9. Дана функция спроса по цене $q(p) = p_0 e^{-0,125 p^2}$, $p_0 > 0$. Выяснить, при каких значениях цены спрос является эластичным, нейтральным и неэластичным.

Решение. Найдем эластичность функции $q(p) = p_0 e^{-0,125 p^2}$, $p_0 > 0$

$$E_p(q) = \frac{p}{q} \cdot \frac{dq}{dp} = \frac{p}{p_0 e^{-0,125 p^2}} \cdot (-0,25 p_0 p e^{-0,125 p^2}) = -0,25 p^2.$$

Спрос будет *эластичным*, если $|E_p(q)| > 1$ ($E_p(q) < -1$), т. е. $-0,25 p^2 < -1 \Leftrightarrow p^2 > 4 \Leftrightarrow p > 2$.

Если $|E_p(q)| < 1$ ($-1 < E_p(q) \leq 0$), то спрос *неэластичный*. Поэтому $-0,25 p^2 > -1 \Leftrightarrow p^2 < 4$. Этому условию удовлетворяют значения $0 < p < 2$.

Наконец, если $|E_p(q)| = 1$ ($E_p(q) = -1$), то спрос является *нейтральным*, т. е.

$$-0,25 p^2 = -1 \Leftrightarrow p^2 = 4 \Leftrightarrow p = 2.$$

Пример 6.10. Функции спроса q и предложения s от цены p выражаются соответственно уравнениями: $q = 100(10 - \sqrt{p})$, $s = 2p + 72$. Найти:

- равновесную цену;
- эластичность спроса при равновесной цене;

- эластичность предложения при равновесной цене;
- эластичность дохода при равновесной цене.

Решение. Равновесная цена находится из уравнения $q = s$:

$$100(10 - \sqrt{p}) = 2p + 72 \Leftrightarrow p + 50\sqrt{p} - 464 = 0.$$

Сделаем замену $\sqrt{p} = t$. Корнями уравнения $t^2 + 50t - 464 = 0$ являются числа $t_1 = -58, t_2 = 8$. Поэтому равновесная цена $p = 64$.

Вычислим эластичность спроса при равновесной цене для функции $q = 100(10 - \sqrt{p})$ по формуле $E_p(q) = \frac{p}{q} \cdot \frac{dq}{dp}$. Имеем

$$E_p(q) = \frac{p}{100(10 - \sqrt{p})} \cdot 100 \left(-\frac{1}{2\sqrt{p}} \right) = -\frac{\sqrt{p}}{2(10 - \sqrt{p})} \Bigg|_{p=64} = -\frac{\sqrt{64}}{2(10 - \sqrt{64})} = -2.$$

Так как $|E_p(q)| = 2 > 1$, спрос эластичный. Увеличение цены на 1 % влечет уменьшение спроса на 2 %.

Эластичность предложения при равновесной цене для функции $s = 2p + 72$ находим аналогично по формуле $E_p(s) = \frac{p}{s} \cdot \frac{ds}{dp}$:

$$E_p(s) = \frac{p}{s} \cdot \frac{ds}{dp} = \frac{p}{2p + 72} \cdot 2 \Bigg|_{p=64} = \frac{128}{200} = 0,64.$$

Увеличение цены на 1 % приводит к увеличению предложения на 0,64 %.

Вычислим эластичность дохода при равновесной цене. Доход, получаемый фирмой, равен произведению цены единицы товара на количество проданных единиц товара:

$$R = pq = 100p(10 - \sqrt{p}).$$

Поэтому

$$E_p(R) = \frac{p}{100p(10 - \sqrt{p})} \cdot 100 \left(10 - \frac{3}{2}\sqrt{p} \right) = \frac{10 - \frac{3}{2}\sqrt{p}}{(10 - \sqrt{p})} \Bigg|_{p=64} = \frac{10 - \frac{3}{2} \cdot \sqrt{64}}{(10 - \sqrt{64})} = -1.$$

Таким образом, увеличение цены на 1 % приводит к снижению дохода на 1 % ($E_p(R) = -1$).

Пример 6.11. Фармацевтическая компания предлагает на рынок новый лекарственный препарат. Рыночный спрос оценивается как $q = 4000 - 10p$, где $q := Q_D = D(p)$ — объем спроса (в тыс. ед.); p — цена (в у.е.). При какой эластичности спроса доходы фирмы будут максимально возможными? При какой цене фирма получит наибольший доход?

Решение. Доход, получаемый компанией, равен произведению цены единицы товара на величину спроса: $R = pq = p(4000 - 10p) = 4000p - 10p^2$. Поэтому доход фирмы достигает своего максимума при условии $R' = (4000p - 10p^2)' = 4000 - 20p = 0$, т.е. фирма получит максимальный доход при цене $p = 200$ (у.е.). Соответствующая эластичность спроса равна:

$$E_{p=200}(q) = \frac{p}{q} \cdot q' \bigg|_{p=200} = \frac{p}{4000 - 10p} \cdot (4000 - 10p)' \bigg|_{p=200} = \frac{-10p}{4000 - 10p} \bigg|_{p=200} = -1.$$

Пример 6.12. Кривая спроса по цене $q = q(p)$ с постоянной эластичностью спроса может иметь вид

1) $q = p_0 p^{-1}$, $p_0 > 0$;

2) $q = p_0 - p$, $p_0 > 0$;

3) $q = \frac{p_0}{p-1}$, $p_0 > 0$;

4) $q = p_0 e^{-p}$, $p_0 > 0$.

Решение. Вычислим коэффициенты эластичности спроса по цене для данных функций по формуле $E_p(q) = \frac{p}{q} \cdot q'$.

Тогда для функции $q = p_0 p^{-1}$, $p_0 > 0$

$$E_p(q) = \frac{p}{q} \cdot p_0 \left(-\frac{1}{p^2} \right) = -\frac{p_0}{pq} = -\frac{p_0}{pp_0 p^{-1}} = -1;$$

для функции $q = p_0 - p$, $p_0 > 0$ $E_p(q) = \frac{p}{q} \cdot (-1) = -\frac{p}{q} = -\frac{p}{p_0 - p}$;

для функции $q = \frac{p_0}{p-1}$, $p_0 > 0$ $E_p(q) = \frac{p}{q} \cdot \left(-\frac{p_0}{(p-1)^2} \right) = -\frac{p(p-1)}{p_0} \frac{p_0}{(p-1)^2} = -\frac{p}{p-1}$;

для функции $q = p_0 e^{-p}$, $p_0 > 0$ $E_p(q) = \frac{p}{p_0 e^{-p}} \cdot (-p_0 e^{-p}) = -p$.

Следовательно, правильным будет ответ $q = p_0 p^{-1}$, $p_0 > 0$.

Пример 6.13. Первоначально билеты в кино продавали по 400 руб., количество посетителей составляло 800 человек в неделю. Как изменится посещаемость кинотеатра после сокращения цен до 300 руб., если известно, что эластичность спроса по цене равна 2,5? Как изменится суммарный доход кинотеатра?

Величина спроса описывается уравнением вида: $q = a - bp$, $a > 0$, $b > 0$. По условию при цене $p = 400$ спрос $q = 800$, т.е. $800 = a - b \cdot 400$, при цене $p = 300$ спрос $q = q_1$, т.е. $q_1 = a - b \cdot 300$. Эластичность спроса по цене равна 2,5:

$$E_p(q) \Big|_{p=400, q=800} = \frac{p}{q} \cdot q' \Big|_{p=400, q=800} = \frac{p}{a - bp} \cdot (-b) \Big|_{p=400, q=800} = \frac{400}{800} (-b) = -2,5.$$

Отсюда $b = 5$ и, с учетом уравнения $800 = a - b \cdot 400$, получаем $a = 2800$. Таким образом, доход при $p = 400$ составляет $R = pq = 400(2800 - 5p) \Big|_{p=400} = 400 \cdot 800 = 320000$. Спрос при цене $p = 300$ составит $q_1 = 2800 - 5 \cdot 300 = 1300$.

Выручка кинотеатра будет равна: $R = pq = 300 \cdot 1300 = 390000$.

Таким образом, суммарный доход вырос на 70000 руб., что составляет приблизительно 22% от первоначального дохода.

Пример 6.14. Найти среднюю и предельную выручку фирмы при линейной убывающей кривой спроса. Какова эластичность спроса по цене в средней точке кривой спроса?

Решение. Кривая спроса может быть представлена формулой:

$$p = a - bq, a > 0, b > 0.$$

В данном выражении величина a — это цена, при которой кривая спроса пересекает ось цен (рис. 6.6). Экономически это цена, по которой никто не будет приобретать товар фирмы. Кривая спроса имеет отрицательный наклон, цена p и количество товара q изменяются в разных направлениях. Суммарная выручка от реализации, получаемая фирмой, равна произведению средней выручки (или цены единицы товара) на количество проданных единиц товара:

$$R = p \cdot q = (a - bq) \cdot q = aq - bq^2.$$

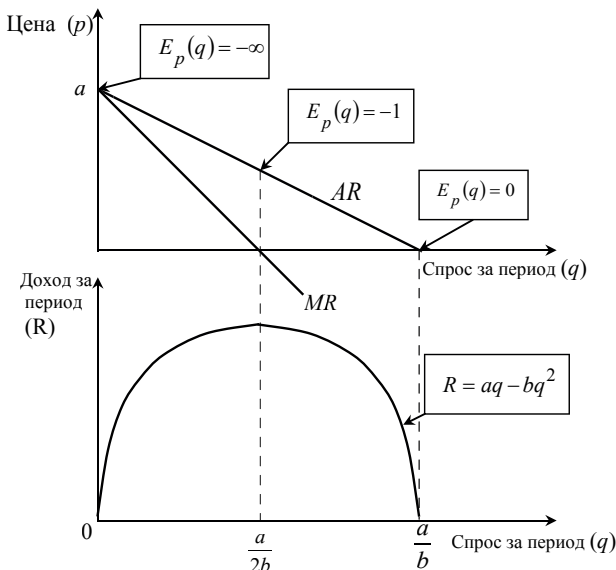


Рис. 6.6. Геометрическая иллюстрация примера 6.14

Как мы отметили, средняя выручка совпадает с ценой единицы товара: $AR = p = a - bq$. Функция предельной выручки есть производная от функции суммарной выручки:

$$MR = \frac{dR}{dq} = a - 2bq.$$

Наклон функции $MR = R'$ вдвое круче наклона кривой спроса, причем MR обращается в ноль при максимуме TR . Геометрически (рис. 6.6) отношение между тремя этими функциями таково, что цена и количество, при которых $MR = 0$, а TR максимальна, пересекаются на середине кривой спроса.

Найдем $\frac{dq}{dp} = \frac{1}{dp/dq} = \frac{1}{-b}$. Подставляя $\frac{dq}{dp} = \frac{1}{-b}$, p и q в форму-

лу эластичности в точке, получаем: $E_p(q) = -\frac{1}{b} \cdot \frac{pb}{a-p} = -\frac{p}{a-p}$.

Так как $MR \equiv a - 2bq = 0$, то значение q в средней точке кривой спроса равно: $q = \frac{a}{2b}$, соответствующее значение цены

есть $p = a - b \cdot \left(\frac{a}{2b}\right) = \frac{a}{2}$. Поэтому $E_p(q) = -\frac{1}{b} \cdot \frac{a/2}{a-a/2} = -1$.

Таким образом, коэффициент эластичности спроса по цене в средней точке линейной (убывающей) функции спроса, вне зависимости от значений a и b в уравнении $p = a - bq$, имеет значение (-1) .

Эластичность спроса по цене $E_p(q) = -\frac{p}{a-p}$ меняется от $-\infty$ в точке a пересечения графиком оси p ($E_p(q) = -\infty$) до нуля в точке пересечения оси q , проходя через значение (-1) в средней точке. Таким образом, линейная кривая спроса эластична в своей верхней половине и неэластична в нижней половине. Спрос эластичен по цене, если предельная вы-

ручка $MR = R'$ положительна, и не эластичен по цене при отрицательном значении MR .

Заметим еще, что эластичность спроса по цене $E_p(q) = -\frac{p}{a-p}$ не связана с наклоном кривой спроса.

Упражнения

1. Функция совокупной полезности U товара x для потребителя имеет вид: $U = 130x - 2,5x^2$, где x — количество потребленного в единицу времени товара. Точка, при которой совокупная полезность является максимальной и потребитель достигает насыщения, равна...

1) 26; 2) 0; 3) 52; 4) 2,5.

2. Пусть функция полезности U задана уравнением: $U = 15q + 7q^2 - (1/3)q^3$. Тогда объем потребления q , при котором начинает действовать закон убывания предельной полезности, равен...

1) 7; 2) 0; 3) 15; 4) -1.

3. Горизонтальная кривая спроса совершенно эластична при текущей рыночной цене. Почему?

4. Вертикальная кривая спроса совершенно неэластична. Почему?

5. Приведите пример кривой спроса с единичной эластичностью.

6. Если зависимость между объемом выпуска готовой продукции y (млн руб.) и объемом производственных фондов x (млн руб.) выражается уравнением $y = 0,65x - 0,4\sqrt{x} - 6,2$, то эластичность выпуска продукции для предприятия, имеющего фонды в размере 36 млн руб., равна...

1) 1,5; 2) 0,5; 3) 0,25; 4) 1.

7. Функция потребления некоторой страны имеет вид: $C(x) = -21,12 + 0,35x + 0,36x^{\frac{5}{6}}$, где x — совокупный нацио-

нальный доход. Если национальный доход составляет 256 единиц, то эластичность потребления по доходу $E_x(C)$ равна...

- 1) 0,8 ; 2) 0,6 ; 3) 0,4 ; 4) 1.

8. Функция потребления некоторой страны имеет вид:

$C(x) = -21,12 + 0,35x + 0,36x^{\frac{5}{6}}$, где x — совокупный национальный доход. Если национальный доход составляет 32 единицы, то эластичность потребления по доходу $E_x(C)$ равна...

- 1) 2,5 ; 2) 0,5 ; 3) 0,25 ; 4) 1.

9. Рассмотрите кривую спроса, заданную уравнением: $p = a + bq - cq^2$, $a > 0, b > 0, c > 0$. Найдите среднюю, суммарную и предельную выручку этой кривой. Исследуйте связь между кривыми спроса и суммарной выручки и эластичностью по цене. Приведите геометрическую иллюстрацию.

10. Спрос q на некоторые товары народного потребления зависит от их стоимости p следующим образом:

$$q = \frac{400}{\sqrt{p}} - 2. \text{ Спрос будет нейтральным (с единичной эла-}$$

стичностью) при ...

- 1) $p = 10000$; 2) 100 ; 3) $p > 100$; 4) $0 < p < 100$.

11. Издательство обнаружило, что при исходной цене книги 12 у.е. оно могло продать 100 экз. в неделю, а после того как цены поднялись до 16 у.е. — только 90 экз. Как изменилась эластичность спроса по цене?

12. Бизнесмен Вася решил основать небольшое предприятие по выпуску изделий народного потребления. Ознакомившись со статистикой, он увидел, что зависимость между спросом q и ценой p за единицу изделия выражается формулой $q = 60 - 2\sqrt{p}$. Найти эластичность спроса. Выяснить, при ка-

ких значениях цены спрос является эластичным, нейтральным и неэластичным. Какие рекомендации о цене за единицу продукции можно дать Васе при $p = 324$ и при $p = 484$ ден. ед.?

13. По оценке Tastee Food Company отношения спроса-дохода на ее продукцию описывается уравнением $q = 500 + 0,1 R$, где q — единицы продукции, а R — средний семейный доход.

а. Определите эластичность спроса по доходу при $I = \$15000$, $I = \$20000$.

б. Результат предыдущих вычислений должен показать, что $E_R(q)$ увеличивается при увеличении дохода. Почему это так? Сохранилось бы это отношение при $q = 0,1 R$?

6.4. Исследование функций в экономике. Максимизация прибыли

Пусть q — количество реализованного товара, $R(q)$ — функция дохода (выручки), $C(q)$ — издержки производства, связанные с выпуском q единиц продукции. Рассмотрим задачу выбора оптимального объема производства фирмой. Функция прибыли от реализации произведенного товара может быть смоделирована зависимостью

$$\pi(q) = R(q) - C(q). \quad (6.4)$$

В микроэкономике известно утверждение: для того чтобы прибыль была максимальной, *необходимо*, чтобы предельный доход и предельные издержки были равны, так что этот принцип можно записать в виде

$$R'(q) = C'(q). \quad (6.5)$$

Действительно, из необходимого условия экстремума для функции (6.4) следует, что $\pi'(q) = 0$, откуда и получается основной принцип.

Найдем связь между предельным доходом и эластичностью спроса по цене:

$$R'_q(q) = (pq)'_q = p'_q \cdot q + p \cdot 1 = p \left(1 + \frac{q}{p} p'_q \right) = p(1 + E_q(p)).$$

Учитывая, что в соответствии с формулой (3.11) для эластичности взаимнообратных функций эластичность спроса относительно цены обратна эластичности цены относительно спроса, т. е. $E_q(p) = \frac{1}{E_p(q)}$, а также то, что $E_p(q) < 0$, получим при произвольном спросе

$$R'_q(q) = p \left(1 - \frac{1}{|E_p(q)|} \right). \quad (6.6)$$

Если спрос *неэластичен*, т. е. $|E_p(q)| < 1$, то в соответствии с (6.6) предельный доход $R'_q(q)$ *отрицателен* при любой цене; если спрос *эластичен*, т. е. $|E_p(q)| > 1$, то предельный доход *положителен*. Таким образом, для неэластичного спроса изменение цены и предельного дохода происходит в одном направлении, а для эластичного спроса — в разных.

Соотношение (6.6) позволяет *сформулировать универсальное правило ценообразования* и облегчить выбор оптимального уровня цен. Для вывода воспользуемся (6.6), а также условием максимизации прибыли (6.5):

$$C'_q = p \left(1 - \frac{1}{|E_p(q)|} \right).$$

Отсюда вытекает *универсальное правило ценообразования*:

$$p = \frac{C'_q}{1 - \frac{1}{|E_p(q)|}}, \quad (6.7)$$

где p — оптимальная цена.

Рассмотрим примеры.

Пример 6.15. Ценовая эластичность спроса на продукцию фирмы монополиста равна $E_p(q) = -1,5$. Предельные издержки составляют 6 у.е. на единицу продукции. Найти цену, обеспечивающую фирме максимальную прибыль.

Решение. В соответствии с формулой (6.7) цена должна быть установлена на уровне $\frac{6}{1 - \frac{1}{1,5}} = 18$ у.е.

Пример 6.16. Найти максимум прибыли, если текущая рыночная цена товара равна \$ 20, а функция суммарных издержек имеет вид:

$$C = C(q) = 15 + 17q - 4q^2 + q^3.$$

Решение. Суммарная выручка равна произведению pq , и так как $p = MR = \$ 20$, то суммарная прибыль

$$\pi = pq - C(q) = 20q - (15 + 17q - 4q^2 + q^3).$$

Предельная прибыль принимает вид:

$$M\pi = \frac{d\pi}{dq} = 20 - (17 - 8q + 3q^2).$$

Приравнявая производную прибыли к нулю, получаем уравнение $3 + 8q - 3q^2 = 0$. Корни этого уравнения $q_1 = -\frac{1}{3}$, $q_2 = 3$. Проверка показывает, что максимальная

прибыль достигается при $q_2 = 3$: $\pi_{\max} = \$ 3$.

Пример 6.17. В соответствии с прогнозами прибыль предприятия описывается функцией $\pi(q) = q^2 - 8q + 10$, где q — величина, характеризующая объем производства (в млн руб.). Найти оптимальный объем выпуска продукции, производимой фирмой.

Решение. Предельная прибыль фирмы $M\pi = \frac{d\pi}{dq} = 2q - 8$.

Приравниваем производную к нулю $M\pi \equiv 2q - 8 = 0 \rightarrow q_{\text{extr}} = 4$. Является ли объем выпуска, равный четырем, оптимальным для фирмы? Исследуем характер изменения знака производной. При $q < q_{\text{extr}} = 4 \rightarrow \pi'(q) < 0$ и прибыль убывает. При $q > q_{\text{extr}} = 4 \rightarrow \pi'(q) > 0$ и прибыль возрастает.

Следовательно, в точке экстремума $q_{\text{extr}} = 4$ прибыль принимает минимальное значение, и таким образом этот объем производства не является оптимальным для фирмы.

Каким же будет оптимальный объем выпуска для фирмы? Ответ на этот вопрос зависит от дополнительного исследования производственных мощностей фирмы. Если фирма не может производить за рассматриваемый период больше 8 единиц продукции ($p(q=0) = p(q=8) = 10$), то оптимальным решением для фирмы будет вообще ничего не производить, а получать доход от сдачи в аренду помещений и/или оборудования. Если же фирма способна производить за рассматриваемый период больше 8 единиц продукции, то оптимальным решением для фирмы будет выпуск на пределе своих производственных мощностей.

Пример 6.18. На начальном этапе производства фирма минимизирует средние издержки, причем функция издержек имеет вид $C = C(q) = 200 + 10q + \frac{1}{2}q^2$. В дальнейшем цена

на единицу товара устанавливается равной 50 у.е. На сколь-

ко единиц товара фирме следует увеличить выпуск? На сколько при этом изменятся средние издержки?

Решение. Средние издержки $\frac{C(q)}{q} = \frac{200 + 10q + \frac{1}{2}q^2}{q} = \frac{200}{q} + 10 + \frac{1}{2}q$.

Предельные средние издержки равны $\left(\frac{C(q)}{q}\right)' = \left(\frac{200}{q} + 10 + \frac{1}{2}q\right)' = -\frac{200}{q^2} + \frac{1}{2}q$. Для того чтобы сред-

ние издержки были минимальными, необходимо, чтобы про-

изводная $\left(\frac{C(q)}{q}\right)' = 0$. Решая уравнение $-\frac{200}{q^2} + \frac{1}{2}q = 0$, нахо-

дим $q = 20$. Минимальное значение средних издержек при

$q = 20$ равно: $AC(q)|_{q=20} = \frac{C(q)}{q}|_{q=20} = \left(\frac{200}{q} + 10 + \frac{1}{2}q\right)|_{q=20} = 30$.

Предельные издержки $MC(q) = C'(q) = 10 + q$. При установившейся цене $p = 50$ оптимальное значение прибыли:

$\pi = pq - C(q) = 50q - 200 - 10q - \frac{1}{2}q^2 \rightarrow \max$. Для того чтобы

прибыль была максимальной, необходимо, чтобы предельный доход и предельные издержки были равны (6.5):

$$50 = 10 + q \Rightarrow q_{\text{опт}} = 40.$$

Таким образом, выпуск продукции следует увеличить на 20 единиц, при этом средние издержки увеличатся:

$$\frac{C(q)}{q}|_{q=40} - \frac{C(q)}{q}|_{q=20} = \left(\frac{200}{q} + 10 + \frac{1}{2}q\right)|_{q=40} - \left(\frac{200}{q} + 10 + \frac{1}{2}q\right)|_{q=20} = 35 - 30 = 5.$$

Пример 6.19. Прибыль фирмы и объем поступления налогов государству при данной налоговой ставке. Пусть цена на продукцию $p = a - bq$, а издержки $C = cq^2 + dq + e$, где a, b, c, d, e — положительные константы. Пусть налог является акцизом со ставкой t , т. е. с каждой проданной единицы товара платится налог t , и вся налоговая сумма равна $T = tq$. Итак, фирма получает прибыль $\pi = q(a - bq) - (cq^2 + dq + e) - tq$. Желая ее максимизировать, фирма ищет оптимальный объем производства. Необходимое условие максимума прибыли $\pi'(q) = 0$; отсюда получаем значение $q^* = \frac{a - d - t}{2(b + c)}$, при этом $\pi''(q^*) = -2b - 2c < 0$, т. е. q^* действительно точка максимума. Так как $t > 0$, то очевидно, что такая налоговая система приводит к снижению оптимального выпуска продукции.

Вычислим суммарный налоговый доход правительства (государства) при объеме производства q^* : $T = tq^* = t \cdot \frac{a - d - t}{2(b + c)}$.

Возникает вопрос: каким должен быть налог t , чтобы величина суммарного налога T со всей продукции была наибольшей? Кривая доходов правительства представляет параболу, ветви которой направлены вниз. Ясно, что максимум достигается при $t^* = \frac{a - d}{2}$ и равен $T^* = \frac{(a - d)^2}{8(b + c)}$, а оптимальный выпуск продукции при этом значении t^* равен $q_1 = \frac{a - d}{4(b + c)}$, и прибыль фирмы равна $\pi(q_1) = \frac{(a - d)^2}{16(b + c)} - e$. Прибыль же фирмы при налоговой ставке t равна $\pi(q^*) = \frac{(a - d - t)^2}{4(b + c)} - e$, откуда

следует, что с ростом t прибыль уменьшается ($0 \leq t \leq a - d$). Хотя доходы правительства при указанных t положительны, существует область значений налоговой ставки (а именно,

при $t \geq t^{\circ} = a - d - \sqrt{4e(b+c)}$, при которой прибыль фирмы отрицательна. При $t \geq t^{\circ}$ происходит резкое сокращение деловой активности предприятий. Понятно, почему производители прикладывают столько усилий, чтобы снизить ставку налога.

Упражнения

1. Объем реализации y продукции зависит от цены p : $y = 100 - 4p$. При этом издержки определяются формулой $C(y) = (y - 20)^2 / 8$. Найти оптимальный объем производства и соответствующие ему значения прибыли и издержек.

2. Ценовая эластичность спроса на продукцию фирмы монополиста равна $E_p(q) = -2$. Издержки определяются формулой $C(q) = 75 + 3q^2$. Найти цену, обеспечивающую фирме максимальную прибыль при объеме производства $q = 10$.

3. Зависимость между доходом фермерского хозяйства (ден. ед./день) и количеством его работников x имеет вид: $R(x) = 2500\sqrt{x}$. Найти оптимальный размер фермерского хозяйства и его прибыль, если дневная зарплата рабочего равна 360 (ден. ед.), а прочие расходы хозяйства составляют $510 \ln x$ (ден. ед.).

4. У фермера имеется стадо в 100 коров, каждая массой в 200 кг. Содержание одной коровы обходится в 92 цента в день. Корова прибавляет 2 кг в день. Рыночная цена коров составляет 10 долларов за 1 кг и падает на 1 цент в день. Как долго фермер должен откладывать продажу, чтобы получить наибольший доход? Сколько он выиграет по сравнению с немедленной продажей?

5. Бизнесмен Вася купил две автомашины по 20 тыс. долларов и перепродал их. При перепродаже первой автомашины прибыль составила $p_1\%$, второй — $p_2\%$, причем $p_1 + p_2 = 20$. О второй сделке Вася не сообщил в налоговую

инспекцию, и с него взяли штраф, составляющий 25 % прибыли, полученной от продажи второго автомобиля. Выгодной ли оказалась сделка Васи? Каковы его максимально возможные потери?

6. Приведите анализ прибыли фирмы и ее налоговой политики, если издержки фирмы $C(q) = q^2 + 1$, доход $R(q) = 16q - q^2$, налог является акцизом со ставкой t .

7. Зависимость между издержками предприятия C и количеством выпускаемой продукции x выражается формулой

$$C(x) = \begin{cases} 48x, & x \leq 125, \\ 375 + (x - 50)^2, & 125 < x \leq 150. \end{cases}$$

Доход от реализации единицы продукции на двух различных рынках составил $p(x) = 120 - \frac{4}{3}\sqrt{x}$ и, соответственно, $p(x) = 120 + \frac{x}{6}$. Какие рекомендации о количестве выпуска-

емой продукции можно дать руководителю предприятия? Какой рынок предпочтительней?

8. Пусть q — количество реализованного товара. Найдите максимум прибыли, если издержки на производство товара и доход выражаются соответственно формулами: $c(q) = q^3 - 40q^2 + 147q + 2000$, $r(q) = 90q - 10q^2$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Математический анализ в вопросах и задачах : учеб. пособие для студентов вузов / В. Ф. Бутузов и [и др.]; под ред. В. Ф. Бутузова. — Изд. 6-е, испр. — СПб. ; М. ; Краснодар : Лань, 2008. — 480 с.
2. Общий курс высшей математики для экономистов : учеб. для студентов вузов, обучающихся по экон. специальностям / Б. М. Рудык и [и др.]; под. общ. ред. В. И. Ермакова; Рос. экон. акад. — М. : ИНФРА-М, 2008. — 655 с.
3. Замков, О.О. Математические методы в экономике / О.О. Замков, А.В. Толстопятенко, Ю.Н. Черемных. — 3-е изд., перераб. М. : ДиС, 2009. — 384 с.
4. Ильин, В.А. Математический анализ : учебник : в 2 ч. Ч. 1 / В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Б.Х. Сендов; под ред. А.Н. Тихонова. Моск. гос. ун-т им. М.В. Ломоносова. — М. : Проспект : Изд-во Моск. ун-та, 2006. — 672 с.
5. Красс, М.С. Математика для экономического бакалавриата : учеб. для студентов, обучающихся по направлению «Экономика» и экон. специальностям / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов; Акад. нар. хоз-ва при Правительстве РФ. — М. : Дело, 2005. — 576 с.
6. Красс, М.С. Математика для экономистов : учеб. пособие для студентов вузов, обучающихся по специальностям

060400 «Финансы и кредит», 060500 «Бухгалт. учет, анализ и аудит», 060600 «Мировая экономика», 351200 «Налоги и налогообложение» / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов. — М.; СПб.; Н. Новгород [и др.] : Питер, 2010. — 464 с.

7. Кремер, Н. Ш. Высшая математика для экономистов : учеб. для студентов вузов, обучающихся по экон. специальностям / Н. Ш. Кремер [и др.]; под ред. Н. Ш. Кремера. — 3-е изд. — Москва : ЮНИТИ, 2012. — 482 с.

8. Макконнелл, К. Р. Экономикс : принципы, проблемы, политика / К. Р. Макконнелл, С. Л. Брю. М. : ИНФРА-М. 2006. — 972 с.

9. Малугин, В. А. Математический анализ : учебное пособие для студентов вузов, обучающихся по направлению 080100 «Экономика» / В. А. Малугин. — М. : Эксмо, 2010. — 592 с.

10. Малыхин, В. И. Высшая математика : учеб. пособие для студентов, обучающихся по специальностям 080105 «Финансы и кредит», 080109 «Бухгалт. учет, анализ и аудит», 080102 «Мировая экономика», 080107 «Налоги и налогообложение» / В. И. Малыхин.. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : ИНФРА-М, 2010. — 365 с.

11. Станковская, И. К., Экономическая теория : учебник / И. К. Станковская, И. А. Стрелец. — 4-е изд., перераб. и доп. — М. : Эксмо, 2009. — 448 с.

12. Томпсон, А. Экономика фирмы / А. Томпсон, Дж. Формби; пер. с англ. — М. : Издательство БИНОМ, 1998. — 544 с.

13. Шевалдина, О. Я. Начала математического анализа : учебное пособие / О. Я. Шевалдина, Е. В. Стрелкова. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2014. — 96 с.

14. Применение производной и исследование функций : сборник примеров и задач для студентов ФЭУ / Шевалдина О. Я. [и др.]. — Екатеринбург : ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, 2007. — 50 с.

15. Шевалдина, О. Я. Введение в математический анализ : сборник примеров и задач для студентов ФЭУ / О. Я. Шевалдина, Г. Ф. Пестерева. — Екатеринбург : УГТУ-УПИ, 2006. — 35 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА 1. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ	3
1.1. Предел функции в точке по Коши (на языке логических формул). Геометрическая интерпретация. Критерий Гейне.....	3
1.2. Предел функции в бесконечности	9
1.3. Односторонние пределы. Теорема о существовании предела функции в точке	11
1.4. Свойства пределов функции в точке	12
1.5. Бесконечно малые и бесконечно большие функции.....	15
1.6. Свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций.....	17
1.7. Арифметические свойства пределов функции. Теорема о пределе композиции	18
1.8. Замечательные пределы.....	20
1.9. Теоремы о пределе монотонной функции.....	22
1.10. Сравнение функций. Теоремы об эквивалентных функциях	26
1.11. Вычисление пределов функций	29
ГЛАВА 2. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ	40
2.1. Непрерывность функции в точке.....	40

2.2. Односторонняя непрерывность, связь с непрерывностью в точке	41
2.3. Классификация точек разрыва	42
2.4. Свойства непрерывных функций.....	47
2.5. Арифметические операции над непрерывными функциями	48
2.6. Теорема о непрерывности сложной функции	48
2.7. Непрерывность элементарных функций	49
2.8. Непрерывность функции на множестве	51
2.9. Существование и непрерывность обратной функции.....	58
2.10. Определение равномерно непрерывной функции. Теорема Кантора	59
ГЛАВА 3. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ	62
3.1. Производная функции в точке	62
3.2. Дифференцируемость функции одной переменной	70
3.3. Правила вычисления производных	72
3.4. Дифференцирование сложной функции	74
3.5. Дифференцирование обратной функции	75
3.6. Производные некоторых элементарных функций (таблица производных)	77
3.7. Логарифмическая производная	81
3.8. Эластичность функции и ее свойства	84
3.9. Производная функции, заданной параметрически ...	89
3.10. Дифференцирование функций, заданных неявно ...	90
ГЛАВА 4. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ.....	92
4.1. Дифференциал функции одной переменной	92
4.2. Производные и дифференциалы высших порядков	97
4.3. Теоремы о непрерывных и дифференцируемых функциях	101

4.4. Формулы конечных приращений, их приложения ...	104
4.5. Раскрытие неопределенностей (Правило Лопиталя)	108
4.6. Формула Тейлора для многочленов.....	113
4.7. Задача наилучшего локального приближения. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано	115
4.8. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.....	116
4.9. Разложения основных элементарных функций (асимптотические формулы)	118
ГЛАВА 5. ИССЛЕДОВАНИЕ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ	124
5.1. Условия возрастания и убывания функции.....	124
5.2. Локальный экстремум	126
5.3. Абсолютный экстремум функции.....	129
5.4. Выпуклость и точки перегиба графика функции	130
5.5. Асимптоты графика функции	135
5.6. Схема исследования функций и построения кривых	139
ГЛАВА 6. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ В ЭКОНОМИКЕ	146
6.1. Определение суммарных, средних и предельных величин в экономике	146
6.2. Примеры использования функций из области экономики	147
6.3. Эластичность функции и ее применение в экономическом анализе	162
6.4. Исследование функций в экономике. Максимизация прибыли.....	174
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	182

Учебное издание

Шевалдина Ольга Яковлевна

МАТЕМАТИКА В ЭКОНОМИКЕ

Редактор *В. О. Корионова*

Компьютерный набор *О. Я. Шевалдиной*

Верстка *Е. В. Ровнушкиной*

Подписано в печать 08.12.2016. Формат 60×84 1/16.
Бумага писчая. Цифровая печать. Усл. печ. л. 10,9.
Уч.-изд. л. 7,0. Тираж 100 экз. Заказ 361.

Издательство Уральского университета
Редакционно-издательский отдел ИПЦ УрФУ
620049, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 5
Тел.: 8 (343) 375-48-25, 375-46-85, 374-19-41
E-mail: rio@urfu.ru

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ
620075, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4
Тел.: 8 (343) 350-56-64, 350-90-13
Факс: 8 (343) 358-93-06
E-mail: press-urfu@mail.ru

